Nome do aluno | Nº | Data / / 20

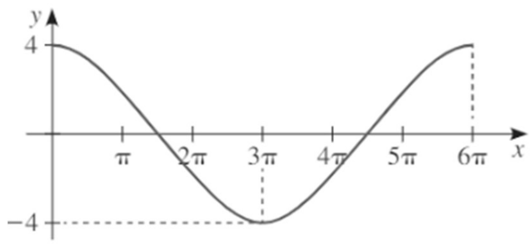
## AVALIAR CONHECIMENTOS

### ESCOLHA MÚLTIPLA

**1.** Seja $f$ uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, $\pi$-periódica.
Qual das expressões seguintes pode definir a função $f$?

**(A)** $\sin x$
**(B)** $\cos \frac{x}{2}$
**(C)** $\tan x$
**(D)** $\sin(2x)$

**2.** No referencial o.n. da figura está representada parte do gráfico de uma função $f$ definida por $f(x) = a\cos(bx)$ em que $a$ e $b$ designam números reais.
Quais dos valores seguintes podem ser os valores de $a$ e de $b$?




**(A)** $a = 4 \quad e \quad b = \frac{2}{3}$
**(B)** $a = 4 \quad e \quad b = \frac{1}{3}$
**(C)** $a = -4 \quad e \quad b = 1$
**(D)** $a = -4 \quad e \quad b = -1$

**3.** Considere a função $h$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 2\cos(3x)$.

**3.1.** Uma expressão geral dos zeros da função $h$ é:

**(A)** $x = \frac{(1+k)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
**(B)** $x = \frac{(1+2k)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$
**(C)** $x = \frac{(1+k)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$
**(D)** $x = \frac{(1+2k)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

**3.2.** O contradomínio de $h$ é:

**(A)** $[-3, 3]$
**(B)** $[-2, 2]$
**(C)** $[-1, 1]$
**(D)** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

**4.** O mostrador do relógio da figura é um círculo e está apoiado numa barra.
Sabe-se que, $t$ segundos após as zero horas, a distância, em metros, da extremidade do ponteiro dos minutos à barra é dada por:

$$d(t) = 1 + 0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{1800}t\right)$$

O comprimento, em metros, do ponteiro dos minutos é:

**(A)** 0,5
**(B)** 0,8
**(C)** 0,9
**(D)** 1

**5.** Se $\tan x = -\frac{3}{4}$ e $x \in \left]0, \pi\right[$, o valor exato da expressão $3 - 5\sin^2 x$ é:

**(A)** $-\frac{6}{5}$
**(B)** $-\frac{1}{5}$
**(C)** $\frac{1}{5}$
**(D)** $\frac{6}{5}$

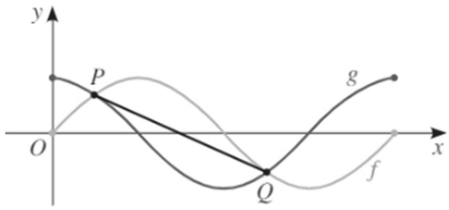
**6.** Qual é o valor de $\tan\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$?

**(A)** $\frac{5}{12}$
**(B)** $\frac{12}{5}$
**(C)** $\frac{13}{12}$
**(D)** $\frac{12}{13}$

7. Qual é o valor de $x$ tal que $\arcsin(2x-3) = -\frac{\pi}{6}$?

**(A)** $-\frac{5}{4}$ **(B)** $-\frac{7}{4}$ **(C)** $\frac{7}{4}$ **(D)** $\frac{5}{4}$

8. No referencial o.n. da figura estão representados os gráficos das funções $f$ e $g$ de domínio $[0, 2\pi]$ definidas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$.
Os pontos $P$ e $Q$ são os pontos de interseção dos dois gráficos. O valor exato de $\overline{PQ}$ é:




**(A)** $\frac{\pi}{2}$

**(B)** $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+2}$

**(C)** $\pi$

**(D)** $\sqrt{\pi^2+2}$

9. Para qualquer valor real de $x$, a expressão

$$\sin(\pi - x)\sin(-x) + \cos(\pi + x)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

É igual a:

**(A)** $-\sin x\,(\sin x + \cos x)$

**(B)** $-\sin^2 x + \cos^2 x$

**(C)** $1$

**(D)** $-1$

10. Seja $m \in \mathbb{R}$. Os valores de $m$ para os quais a equação $1 - \sin x = m^2$ é possível são:

**(A)** $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

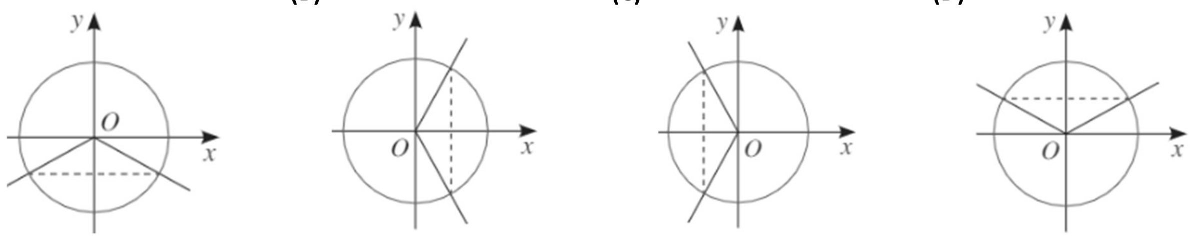
**(B)** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

**(C)** $]-\infty, -\sqrt{2}]$

**(D)** $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

11. Qual das seguintes representações gráficas traduz as soluções da equação $-2\cos x - 1 = 0$ no intervalo $]-\pi, \pi[$?

**(A)** **(B)** **(C)** **(D)**




## Resposta Aberta

12. Considere as funções $f$ e $g$, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = -3\sin(2x) \qquad e \qquad g(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

**12.1.** Determine o valor exato de $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

**12.2.** Determine o período fundamental de cada uma das funções.

**12.3.** Calcule uma expressão geral para os zeros das funções $f$ e $g$.

**12.4.** Determine o contradomínio de $g$.

**12.5.** Estude a paridade de $f$ e de $g$.

**13.** A profundidade da água do mar; à entrada de um certo porto de abrigo, varia com a maré.
Admita que o tempo que decorre entre cada maré baixa e cada maré alta é de 6 horas, sendo igualmente de 6 horas o tempo que decorre entre cada maré alta e cada maré baixa.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função que dá a profundidade, em metros, da água do mar, à entrada desse porto, $t$ horas após a maré baixa.
Qual é a expressão correta?

**(A)** $9-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

**(B)** $9-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

**(C)** $11-4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$

**(D)** $9+2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Numa pequena composição, explique as razões pelas quais rejeita as outras três expressões.
Apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada.

**14.** Simplifique a expressão seguinte:

$$\sin(\pi+\theta)+\cos(-\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

Calcule o seu valor exato, sabendo que $\cos\theta=-\frac{1}{4}\wedge\theta\in 2^{\text{o}}\,Q$.

**15.** Seja $h$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x)=2+(1+\cos x)^2-(1-\cos x)^2$$

**15.1.** Mostre que:

**15.1.1.** $h(x)=2+4\cos x$

**15.1.2.** $h$ é $4\pi$-periódica. O valor $4\pi$ é o período fundamental de $h$?

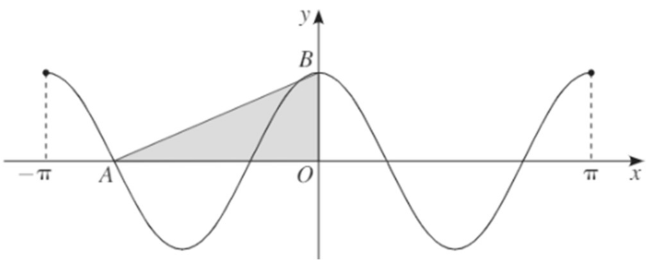
**15.2.** Sabendo que $h(\alpha)=1$ e que $\alpha$ pertence ao 3º quadrante, determine o valor exato de:

$$\sin(\alpha+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

**16.** Determine os valores de $k$ reais para os quais é possível, em $\mathbb{R}$, a condição:

$$\sin x=\sqrt{k+1}\quad\wedge\quad\cos x=k$$

**17.** No referencial o.n. $xOy$ da figura está representado o gráfico da função $f$ de domínio $[-\pi,\pi]$, definida por $f(x)=1-2\sin^2 x$ e o triângulo $[AOB]$.




Sabe-se que:

- Os pontos $A$ e $B$ pertencem ao gráfico de $f$;
- O ponto $A$ pertence ao eixo $Ox$ e o ponto $B$ pertence ao eixo $Oy$.

**17.1.** Sabendo que para $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ se tem $f(\beta)=0{,}1$, determine o valor exato de:

$$\cos\beta+\sin(x+\beta)$$

**17.2.** Determine a área do triângulo $[AOB]$.

**17.3.** Determine os valores do domínio de $f$, tais que $f(x)=-\frac{1}{2}$.

**18.** Considere o triângulo isósceles da figura, em que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.


**18.1.** Mostre que a área do triângulo é dada, em função de $\alpha$, por:

$$A(\alpha) = 4\sin\alpha\cos\alpha$$

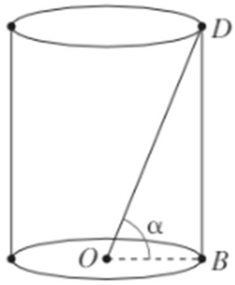
**18.2.** Determine a área do triângulo para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

**18.3.** Sabendo que $\sin(\pi - \alpha) = \frac{5}{12}$, determine o valor exato de $A(\alpha)$.

**19.** Determine o domínio e os zeros, se existirem, da função definida por:

**19.1.** $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ **19.2.** $g(x) = \frac{x}{\tan(2x)}$ **19.3.** $h(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

**20.** Na figura está representado um cilindro de revolução, tal que:




- $O$ é o centro da base inferior;
- A reta $DB$ é perpendicular a $OB$;
- $D$ pertence à base superior do cilindro;
- O raio da base mede $4\ cm$;
- $\alpha$ é a amplitude do ângulo $BOD$.

**20.1.** Prove que o volume do cilindro é dado em função de $\alpha$ por:

$$V(\alpha) = 64\pi\tan\alpha\,,\quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

**20.2.** Determine a altura do cilindro para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

**20.3.** Calcule o valor de $\alpha$ para o qual o volume do cilindro é $64\pi$.

**20.4.** Para que valores de $\alpha$ a altura do cilindro mede o mesmo que o diâmetro da base? Utilize valores aproximados às décimas do radiano.

**21.** Sabendo que $\sin(\pi - x) = \frac{1}{3}$ e $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, determine o valor exato de:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan(2\pi + x)$$

**22.** Determine:

**22.1.** $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**22.2.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

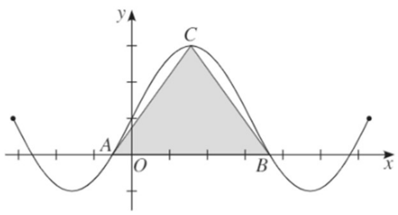
**22.3.** $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

**22.4.** $\tan\left(\arccos 1 + \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$

**22.5.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

**22.6.** $\sin\left(-\arctan\frac{3}{4}\right)$

**23.** Na figura ao lado está representado o gráfico da função $f(x) = 1 + 2\sin x$, de domínio $[-\pi, 2\pi]$.




- Os pontos $A$ e $B$ são pontos de interseção consecutivos do gráfico de $f$ com o eixo $Ox$;
- A abcissa de $A$ é negativa e a abcissa de $B$ é positiva;
- A ordenada de $C$ é o máximo da função.

Utilizando apenas processos analíticos, determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

**24.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

**24.1.** $2 - \sin x = 1$

**24.2.** $2 - 2\cos x = 3$

**24.3.** $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

**24.4.** $1 + \cos(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

**24.5.** $\sin x \cos(2x) = 0$

**24.6.** $1 - 2\sin^2 x = 0$

**24.7.** $\sin(2x) = \cos x$

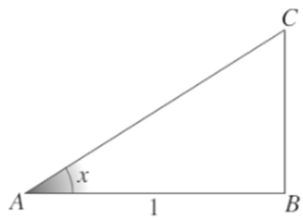
**24.8.** $\sqrt{3} - \tan x = 0$

**24.9.** $\tan x = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

**25.** Resolva, em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, a equação seguinte:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos x$$

**26.** Considere um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$.
Admita que se tem $\overline{AB} = 1$, $B\hat{A}C = x$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.




**26.1.** Mostre que o perímetro do triângulo é dador por:

$$P(x) = \frac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x}$$

**26.2.** Calcule o valor exato de $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

**26.3.** Sabendo que $\tan \alpha = \frac{5}{12}$, determine o valor exato de $P\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

**27.** Resolva, analiticamente, em $[0, 2\pi]$ e em $[-\pi, \pi]$:

**27.1.** $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

**27.2.** $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

**27.3.** $\tan x \leq 1$

**28.** Determine quais são as soluções inteiras de:

$$2\sin x - \sqrt{3} > 0 \ \wedge \ x \in \,]-\pi, \pi[$$

**29.** Resolva, em $[0, 2\pi]$, a seguinte condição:

$$\sin x \leq \frac{1}{2} \ \wedge \ \cos x < 0$$

**30.** Mostre que:

**30.1.** $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x \,, \forall x \in \mathbb{R}$

**30.2.** $\frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin x} = \sin x \cos x \,, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

**30.3.** $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x \,, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**30.4.** $1 + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cos x = \sin^2 x$