Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

AVALIAR CONHECIMENTOS - SOLUÇÕES

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C

$$\begin{cases} \tan 45^\circ = \dfrac{10}{\overline{BD}+\overline{AD}} \\ \tan 60^\circ = \dfrac{10}{\overline{AD}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{10}{\overline{BD}+\overline{AD}} \\ \sqrt{3} = \dfrac{10}{\overline{AD}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \overline{AD} = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{\overline{BD}+\dfrac{10\sqrt{3}}{3}} = 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BD}+\dfrac{10\sqrt{3}}{3} = 10 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BD} = 10 - \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BD} = \dfrac{10\left(3-\sqrt{3}\right)}{3} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

A opção correta é a (C).

2. C

$$\begin{cases} \tan 45^\circ = \dfrac{h}{\overline{XC}} \\ \tan 60^\circ = \dfrac{h}{30-\overline{XC}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \overline{XC} \\ h = \sqrt{3}\left(30-\overline{XC}\right) \end{cases} \Rightarrow h = 30\sqrt{3} - \sqrt{3}h \Leftrightarrow$$

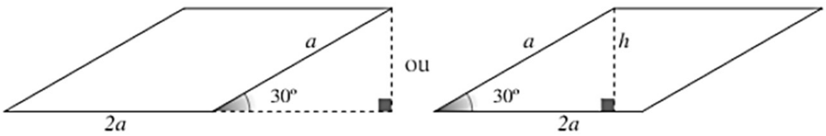
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)h = 30\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}-90}{-2} = 45 - 15\sqrt{3}$$

A opção correta é a (C).

3. D

Pelo enunciado, obtém-se:



Os dois paralelogramos têm a mesma área e, em ambos os casos, tem-se:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2}$$

Logo, $A_{\text{paralelogramo}} = 2a \times \dfrac{a}{2} = a^2$.

A opção correta é a (D).

4. D

$$\frac{\sin 74^\circ}{\overline{AB}} = \frac{\sin 25^\circ}{150} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{150 \sin 74^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 341 \text{ m}$$

A opção correta é a (D).

5. B

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AB} = \sqrt{61}\ ;\ \overline{BC} = \sqrt{34} \text{ e } \overline{AC} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Pelo teorema de Carnot, vem:

$$\sqrt{34}^2 = \sqrt{45}^2 + \sqrt{61}^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times \sqrt{61} \times \cos C\hat{A}B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 34 = 106 - 6\sqrt{305}\cos C\hat{A}B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos C\hat{A}B = \frac{12}{\sqrt{305}} = \frac{12\sqrt{305}}{305}$$

Como $\cos^{-1}\left(\frac{12\sqrt{305}}{305}\right) \approx 46{,}6^\circ$, $C\hat{A}B \approx 46{,}6^\circ$.

A opção correta é a (B).

RESPOSTA ABERTA

6.

6.1. $\overline{AC} = 70\cos 50^{\text{o}} \approx 45{,}0\ cm$

$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{AC}}{70} \Leftrightarrow \overline{AC} = 70\cos 50^\circ \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 45{,}0 \text{ cm}$$

6.2. $\overline{BC} = 70\sin 50^{\text{o}} \approx 53{,}6\ cm$

$$\sin 50^\circ = \frac{\overline{BC}}{70} \Leftrightarrow \overline{BC} = 70\sin 50^\circ \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 53{,}6 \text{ cm}$$

6.3. $h = 45\sin 50^{\text{o}} \approx 34{,}5\ cm$

$$\sin 50^\circ = \frac{h}{\overline{AC}} \Leftrightarrow h = 45\sin 50^\circ \approx 34{,}5 \text{ cm}$$

7.

7.1.

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 =$$
$$= \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$$
$$= 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2 \times 1 = 2$$

7.2.

$$\frac{\tan\alpha - \sin^2\alpha\tan\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1 - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha}}{\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

8.

8.1. $\cos^2\beta = \frac{16}{25}$; $\tan\beta = \frac{3}{4}$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Como β é agudo, então, $\cos\beta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Logo:

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

8.2. $\hat{\beta} \approx 36{,}9^{\text{o}}$

Como $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36{,}9^\circ$ e β é agudo, então, $\hat{\beta} \approx 36{,}9^\circ$.

9.

9.1. $\sin B\hat{A}C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos B\hat{A}C = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\tan B\hat{A}C = 2$

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \left(2\overline{AB}\right)^2 = 5\overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{5}\ \overline{AB}$$

Então, os valores exatos das razões trigonométricas do ângulo BAC são:

$$\sin B\widehat{A}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2\overline{AB}}{\sqrt{5}\ \overline{AB}} \Leftrightarrow \sin B\widehat{A}C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\cos B\widehat{A}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{5}\ \overline{AB}} \Leftrightarrow \cos B\widehat{A}C = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\tan B\widehat{A}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan B\widehat{A}C = 2$$

9.2. 53º

Pela alínea anterior, sabe-se que $B\widehat{A}C \approx 63{,}43°$, então, $O\widehat{D}C = O\widehat{C}D =$
$= B\widehat{A}C = 63{,}43°$, pois são ângulos alternos internos.

Logo, $C\widehat{O}D = 180° - 2 \times 63{,}43° = 53{,}14° \approx 53°$.

10.

10.1. $15{,}90\ cm^2$

$$\sin D\widehat{A}E = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \sin 55° = \frac{\overline{DE}}{4} \Leftrightarrow \overline{DE} = 4\sin 55° \approx 3{,}277 \text{ cm}$$
$$\cos D\widehat{A}E = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \cos 55° = \frac{\overline{AE}}{4} \Leftrightarrow \overline{AE} = 4\cos 55° \approx 2{,}294 \text{ cm}$$

Como $\overline{BE} = \overline{BA} - \overline{AE} = 6 - 2{,}294 = 3{,}706$, então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\overline{BE} + \overline{CD}}{2} \times \overline{DE} = \frac{3{,}706 + 6}{2} \times 3{,}277 \approx 15{,}90 \text{ cm}^2$$

10.2. $\hat{\alpha} = 21{,}6º$

Sabe-se que $A\widehat{D}C = 180° - 55° = 125°$.

Aplicando o teorema de Carnot, obtém-se o comprimento da diagonal do paralelogramo:

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6\cos 125° \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 8{,}918 \text{ cm}$$

Finalmente, pela lei dos senos, obtém-se a amplitude de α:

$$\frac{\sin 125°}{8{,}918} = \frac{\sin\alpha}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4\sin 125°}{8{,}918}$$

Como $\sin^{-1}\left(\frac{4\sin 125°}{8{,}918}\right) \approx 21{,}6°$ e α é agudo, então, $\widehat{\alpha} \approx 21{,}6°$.

11. $56\ m$

Considere-se a a distância da Helena ao monumento quando está mais perto e h a altura do monumento menos os $1{,}60$ metros de altura a que os olhos da Helena se encontram do solo.

$$\begin{cases} \tan 40^\circ = \dfrac{h}{a+45} \\ \tan 70^\circ = \dfrac{h}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = (a+45)\tan 40^\circ \\ h = a\tan 70^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\tan 70^\circ = (a+45)\tan 40^\circ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(\tan 70^\circ - \tan 40^\circ) = 45\tan 40^\circ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{45\tan 40^\circ}{\tan 70^\circ - \tan 40^\circ} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 19{,}8 \\ h \approx 54{,}4 \end{cases}$$

Logo, $h + 1{,}6 \approx 56$ m.

A altura do monumento é de, aproximadamente, 56 metros.

12.

12.1. $4\sqrt{2}\ u.c.$

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ u. c.}$$

Seja O o centro da base $[ABCD]$.

$$\cos P\hat{A}O = \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \text{ u. c.}$$

12.2. $\approx 69{,}3º$

Designe-se por M o ponto médio do segmento $[AB]$.

Considere-se o triângulo retângulo $[AMP]$:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 \text{ u. c.}$$

$$\cos P\hat{A}M = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos P\hat{A}M = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Então, $P\hat{A}M \approx 69{,}3^\circ$.

12.3. $\frac{32}{3}\sqrt{6}\ u.v.$

Calcule-se $\overline{OP}$, a altura da pirâmide $[ABCDP]$:

$$\sin P\hat{A}O = \frac{\overline{OP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{\overline{OP}}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OP} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ u. c.}$$

$$V_{[ABCDP]} = \frac{A_{[ABCD]} \times \overline{OP}}{3} = \frac{16 \times 2\sqrt{6}}{3} = \frac{32}{3}\sqrt{6} \text{ u. v.}$$

13.

13.1.

$$1 - 2\sin^2 120^\circ = 1 - 2\sin^2 60^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

13.2.

$$(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)^2 = (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$$

13.3.

$$\cos 120^\circ \sin 150^\circ = -\cos 60^\circ \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

13.4.

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

14. $44\ cm$

Aplicando o teorema de Carnot, obtém-se a medida do comprimento de $\overline{RQ}$:

$$\overline{RQ}^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \times 10 \times 20 \cos 40^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{RQ}^2 = 500 - 400 \cos 40^\circ \Leftrightarrow \overline{RQ} \approx 14 \text{ cm}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[ABC]$, com aproximação às unidades, é de 44 cm.

15.

15.1. $26\ m$

Considere-se o triângulo $[ABC]$ e os seus ângulos internos $C\widehat{A}B = 60^\circ$, $A\widehat{B}C = 65^\circ$ e $A\widehat{C}B = 55^\circ$. Tem-se:

$$\frac{\sin 55^\circ}{40} = \frac{\sin 65^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{40 \sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 44{,}26 \text{ m}$$

Por outro lado, $A\widehat{D}B = 180^\circ - 35^\circ - 95^\circ = 50^\circ$, e:

$$\frac{\sin 50^\circ}{40} = \frac{\sin 100^\circ}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 51{,}42 \text{ m}$$

Logo, ao aplicar o teorema de Carnot, obtém-se d:

$$d^2 \approx 44{,}26^2 + 51{,}42^2 - 2 \times 44{,}26 \times 51{,}42 \cos 30^\circ \Leftrightarrow d \approx \sqrt{661{,}08} \approx 26 \text{ m}$$

15.2. $48\ m$

Considere-se o triângulo $[ABD]$ e os seus ângulos internos $D\widehat{A}B = 60^\circ$, $A\widehat{B}D = 95^\circ$ e $A\widehat{D}B = 25^\circ$. Tem-se:

$$\frac{\sin 25^\circ}{25} = \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{25 \sin 60^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 51{,}23 \text{ m}$$

Considere-se agora o triângulo $[ABC]$ e os seus ângulos internos $B\widehat{A}C = 115^\circ$, $A\widehat{B}C = 40^\circ$ e $A\widehat{C}B = 25^\circ$. Tem-se:

$$\frac{\sin 25^\circ}{25} = \frac{\sin 115^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{25 \sin 115^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 53{,}613 \text{ m}$$

Logo, ao aplicar o teorema de Carnot, obtém-se d:

$$d^2 = 51{,}23^2 + 53{,}613^2 - 2 \times 51{,}23 \times 53{,}613 \cos 55^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d^2 = 5498{,}867 - 5493{,}188 \cos 55^\circ \Leftrightarrow d \approx 48 \text{ m}$$