Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Sucessões monótonas

1. Considere a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{3n-2}{n}$$

1.1. Represente graficamente os cinco primeiros termos da sucessão.
1.2. Averigue se 3 é termo da sucessão.
1.3. Prove que: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 3$.
1.4. Calcule a_{n+1} e a_{2n}.

2. Mostre que as seguintes sucessões são monótonas e indique o tipo de monotonia.

2.1. $u_n = \frac{2n}{n+1}$

2.2. $v_n = 5 - 4n$

2.3. $w_n = n^2 + 1$

2.4. $x_n = 2 - \sin(n\pi)$

3. Classifique quanto à monotonia as sucessões de termo geral:

3.1. $a_n = 4n^2 - 1$

3.2. $b_n = (5-n)^2$

3.3. $c_n = \frac{n-3}{2n}$

3.4. $d_n = |n-6|$

3.5. $e_n = \begin{cases} 2, & se\ n\ par \\ 3, & se\ n\ ímpar \end{cases}$

4. Considere as sucessões de termo geral: $u_n = kn + 2, k \in \mathbb{R}$.

Indique os valores de k para os quais (u_n) é:

4.1. Crescente.
4.2. Decrescente em sentido lato.
4.3. Constante.

5. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 4 \qquad e \qquad v_{n+1} - v_n = 4 - n$$

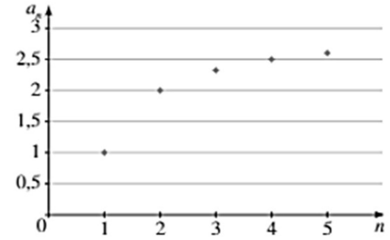
5.1. Sabendo que $u_1 = 5$, determine os cinco primeiros termos de (u_n).

5.2. Classifique, justificando, cada uma das sucessões quanto à monotonia.

Soluções

1.

1.1. Como $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{7}{3}, a_4 = \frac{5}{2}$ e $a_5 = \frac{13}{5}$, tem-se:



1.2.

$$a_n = 3 \Leftrightarrow \frac{3n-2}{n} = 3 \Leftrightarrow 3n - 2 = 3n \Leftrightarrow -2 = 0$$

Equação impossível; logo, 3 não é termo da sucessão.

1.3.

Tem-se que $\frac{3n-2}{n} = \frac{3n}{n} - \frac{2}{n} = 3 - \frac{2}{n}$.

Como $\frac{2}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então, $a_n < 3$.

1.4.

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+1}$$

$$a_{2n} = \frac{3(2n)-2}{2n} = \frac{6n-2}{2n} = \frac{3n-1}{n}$$

2.

2.1.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2 + 4n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é monótona crescente.

2.2.

$$v_{n+1} - v_n = (5 - 4(n+1)) - (5 - 4n) = 5 - 4n - 4 - 5 + 4n =$$

$$= -4 < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (v_n) é monótona decrescente.

2.3.

$$w_{n+1} - w_n = ((n+1)^2 + 1) - (n^2 + 1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (w_n) é monótona crescente.

2.4.

$$x_{n+1} - x_n = \left(2 - \sin((n+1)\pi)\right) - (2 - \sin(n\pi)) =$$

$$= 2 - 2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (x_n) é constante.

3.

3.1.

$$a_{n+1} - a_n = (4(n+1)^2 - 1) - (4n^2 - 1) =$$

$$= 4n^2 + 8n + 4 - 1 - 4n^2 + 1 = 8n + 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (a_n) é monótona crescente.

3.2.

$$b_{n+1} - b_n = (5-(n+1))^2 - (5-n)^2 =$$
$$= 16 - 8n + n^2 - 25 + 10n - n^2 = 2n - 9$$

$2n - 9 > 0$ para $n \geqslant 5$ mas $2n - 9 < 0$ para $n < 5$; logo, (b_n) não é monótona.

3.3.

$$c_{n+1} - c_n = \frac{(n+1)-3}{2(n+1)} - \frac{n-3}{2n} = \frac{n^2 - 2n - (n-3)(n+1)}{2n^2 + 2n} =$$
$$= \frac{n^2 - 2n - n^2 - n + 3n + 3}{2n^2 + 2n} = \frac{3}{2n^2 + 2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (c_n) é monótona crescente.

3.4.

$$d_{n+1} - d_n = |(n+1) - 6| - |n - 6| = |n-5| - |n-6|$$

Para $n = 1$ obtém-se $|n-5| - |n-6| = -1$ e para $n = 7$ obtém-se $|n-5| - |n-6| = 1$; logo, (d_n) não é monótona.

3.5.

$e_1 = 3 > e_2 = 2$ e $e_2 = 2 < e_3 = 3$; logo, (e_n) não é monótona.

4. $u_{n-1} - u_n = (k(n+1)+2) - (kn+2) = kn + k + 2 - kn - 2 = k$

4.1. (u_n) é crescente, se $k > 0$, ou seja, se $k \in]0, +\infty[$

4.2. (u_n) é decrescente em sentido lato, se $k \leq 0$, ou seja, se $k \in]-\infty, 0]$

4.3. (u_n) é constante, se $k = 0$

5.

5.1.

$u_1 = 5$; $u_2 - u_1 = 4 \Leftrightarrow u_2 = 9$; $u_3 - u_2 = 4 \Leftrightarrow u_3 = 13$;
$u_4 - u_3 = 4 \Leftrightarrow u_4 = 17$ e $u_5 - u_4 = 4 \Leftrightarrow u_5 = 21$

5.2.

Como $u_{n+1} - u_n = 4 > 0$, (u_n) é crescente.

Como para $n = 1$, $4 - n = 3$ e para $n = 5$, $4 - n = -1$, (v_n) não é monótona.