Nome do aluno | **Nº** | **Data** / / 20

Sucessões limitadas

1. Considere os seguintes subconjuntos de números reais:

$$A =]-\infty, 5] \qquad B =]-1, 4] \cup \{7\} \qquad C = \{0, 1\}$$

1.1. Quais dos conjuntos dados são minorados? E limitados?

1.2. Indique o conjunto dos majorantes de cada um dos conjuntos apresentados.

2. Dê um exemplo de um subconjunto de números reais:

2.1. Limitado.

2.2. Majorado e não limitado.

2.3. Não limitado.

3. Prove que são limitadas as sucessões com os termos gerais seguintes, indicando um majorante e um minorante para cada.

3.1. $a_n = \frac{3}{2n-1}$ **3.2.** $b_n = -7$ **3.3.** $c_n = \frac{5n-1}{n}$

4. Uma sucessão (w_n) de termos positivos é tal que, para todo o número natural $n, \frac{3}{w_n} \geq 4$.

Justifique que a sucessão é limitada.

5. Considere a sucessão de termo geral: $w_n = n^2 - 15n$.

5.1. Mostre que (w_n) não é monótona.

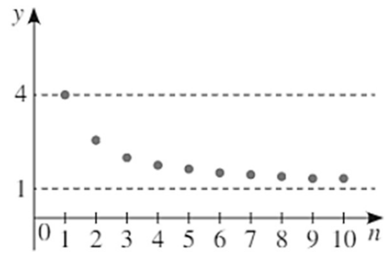
5.2. Indique, caso exista, o mínimo do conjunto dos termos da sucessão.

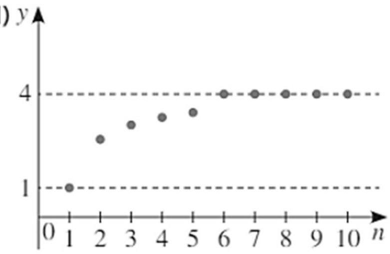
6. De uma sucessão (a_n) sabe-se que:

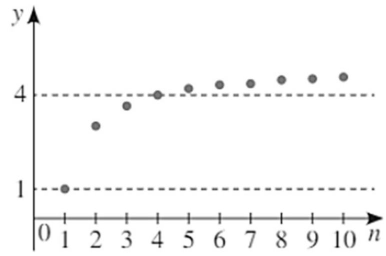
- $a_1 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 4$

Em nenhuma das figuras seguintes estão representados graficamente os dez primeiros termos de (a_n).

Indique, para cada representação, uma razão que justifique a afirmação anterior.

(I)


(II)


(III)


Soluções

1.

1.1. Tem-se que $\forall a \in A, a \leq 5$ mas $\nexists m \in \mathbb{R}: a \geq m$.
Logo, A é apenas majorado e, por isso, não é limitado.
Tem-se que $\forall b \in B, -1 \leq b \leq 7$.
Logo, B é minorado e majorado, sendo, por isso, limitado.
Tem-se que $\forall c \in C, 0 \leq c \leq 1$.
Logo, C é minorado e majorado, sendo, por isso, limitado.

1.2. Majorantes de A: $[5, +\infty[$
Majorantes de B: $[7, +\infty[$
Majorantes de C: $[1, +\infty[$

2.

2.1. $]2, 4[$

2.2. $]-\infty, 4[$

2.3. $]-\infty, 4[$

3.

3.1.

Tem-se que $2n - 1 \geqslant 1$; logo, $0 < \dfrac{3}{2n-1} \leqslant 3, \forall n \in \mathbb{N}$.
Assim, (a_n) é limitada; 0 é um minorante e 3 é um majorante.

3.2.

Tem-se que (b_n) é constante; logo, (b_n) é limitada; -7 é simultaneamente um minorante e um majorante.

3.3.

Tem-se que $\dfrac{5n-1}{n} = 5 - \dfrac{1}{n}$ e $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, ou seja, $-1 \leqslant -\dfrac{1}{n} < 0$.
Portanto, $-1 \leqslant -\dfrac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow 4 \leqslant 5 - \dfrac{1}{n} < 5, \forall n \in \mathbb{N}$.
Assim, (c_n) é limitada; 4 é um minorante e 5 é um majorante.

4.

$\dfrac{3}{w_n} \geqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{w_n}{3} \leqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow w_n \leqslant \dfrac{3}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$
Como (w_n) é uma sucessão de termos positivos, tem-se $w_n \geqslant 0$.
Logo, $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{3}{4}$, ou seja, (w_n) é limitada.

5.

5.1.

$w_{n+1} - w_n = ((n+1)^2 - 15(n+1)) - (n^2 - 15n) =$
$= n^2 + 2n + 1 - 15n - 15 - n^2 + 15n = 2n - 14$
Para $n = 1$, $2n - 14 = -12$, e, para $n = 8$, $2n - 14 = 2$;
logo, (w_n) não é monótona.

5.2.

$n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 15$
Logo, se considerarmos a parábola dada por $x^2 - 15x$, o seu vértice tem de abcissa $7{,}5$. Assim, o mínimo desta sucessão será atingido na ordem 7 ou 8.
Como $w_7 = 7^2 - 15 \times 7 = -56$ e $w_8 = 8^2 - 15 \times 8 = -56$, o mínimo é -56.

6. Na figura (I), tem-se $a_1 = 4 \neq 1$; na figura (II), a sucessão não é estritamente crescente; e, na figura (III), há termos superiores a 4.