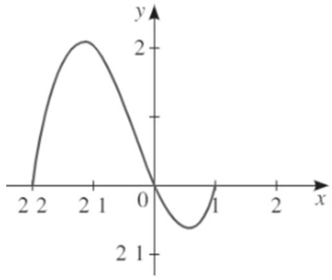
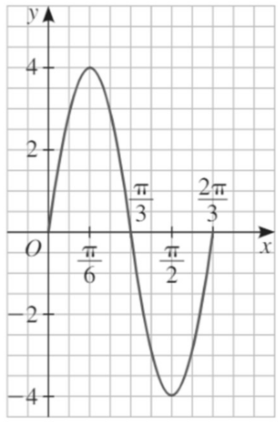
Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

O seno, o cosseno e a tangente como funções reais de variável real



1. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico f de uma função periódica com período fundamental 3.
Sabe-se que os pontos $(-2, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ pertencem ao gráfico de f.

1.1. Indique os zeros da restrição de f a $[-2, 4]$.
1.2. Complete o gráfico para o intervalo $[-5, 6]$.



2. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g periódica de período fundamental $\frac{2\pi}{3}$ e de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- Os zeros de g no intervalo $[0, \pi]$ são $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e π
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$

Indique:

2.1. Os zeros de g no intervalo $[-\pi, 0]$.
2.2. $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2.3. $g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3. Mostre que as funções seguintes são π-periódicas.

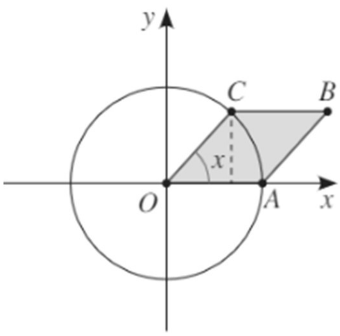
3.1. $f(x) = \sin(2x)$
3.2. $g(x) = \cos(6x)$

4. Indique o contradomínio das funções definidas por:

4.1. $f(x) = 3 + \sin x$
4.2. $g(x) = 2\cos x$

5. Determine uma expressão geral dos zeros das seguintes funções:

5.1. $f(x) = \sin(2x)$
5.2. $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
5.3. $h(x) = \sin x \cos x$



6. Na figura estão representados a circunferência trigonométrica e um losango $[OABC]$, tal que A e C pertencem à circunferência e $x \in]0, \pi[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC.

6.1. Mostre que a área do losango é dada, em função de x, por:
$$A(x) = \sin x\,, x \in]0, \pi[$$
6.2. Determine a área do losango para $x = \frac{5\pi}{6}$.
6.3. Calcule $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.
6.4. Determine o valor de x para o qual o losango tem área máxima.

7. Considere a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

7.1. Determine a expressão geral dos zeros de f.
7.2. Calcule o período fundamental de f.
7.3. Justifique que f não é par nem ímpar.

8. Prove que são verdadeiras as proposições:

8.1. $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
8.2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

9. Sabendo que x é um ângulo do 3º quadrante e $\sin x = -\frac{1}{5}$, calcule $\sin(-x) + 2\cos x$.

10. Simplifique as expressões seguintes:

10.1. $\sin(\pi + x) + \cos(2\pi - x)$

10.2. $\frac{-2\,\mathrm{si}\ \ (\pi+x)+\mathrm{si}\ \ (-x)}{\cos(x-\pi)+2\,\mathrm{c}\ \ \ (-x)}$

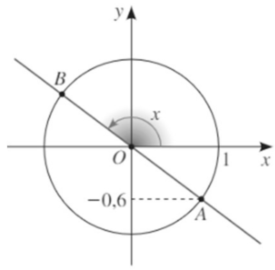
11. Sabendo que $x \in]0, \pi[$ e que $\cos(x - \pi) = \frac{2}{3}$, determine:

11.1. $\sin x$

11.2. $\sin(\pi + x) - \cos(-x)$

12. No referencial o.n. xOy da figura estão representados a circunferência trigonométrica e dois pontos A e B, tais que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo que tem como lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade $\dot{O}B$;
- A ordenada do ponto A é $-0{,}6$.



Determine:

12.1. $\cos(\pi + x)$

12.2. $\tan x$

12.3. $\sin(-x)$

13. Determine:

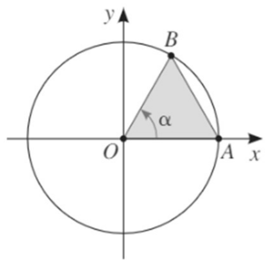
13.1. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

13.2. $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

13.3. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

14. Sabendo que $x \in [-\pi, 0]$ e que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$, calcule $\sin(\pi - x) + 2\tan x$.

15. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio $[AO]$, sendo A o ponto de coordenadas $(4, 0)$, B um ponto que se desloca sobre a circunferência e α o ângulo AOB.



15.1. Calcule a área do triângulo $[AOB]$ quando $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{3}$.

15.2. Justifique que a área do triângulo $[AOB]$ é dada em função de α por:

$$A(\alpha) = 8|\sin \alpha|$$

15.3. Sabendo que $A(\alpha) = \frac{8}{5}$ e que α é um ângulo do 2º quadrante, calcule o valor exato de $\cos(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

16. Determine o domínio e o período fundamental das seguintes funções reais de variável real:

16.1. $f(x) = \tan(2x)$

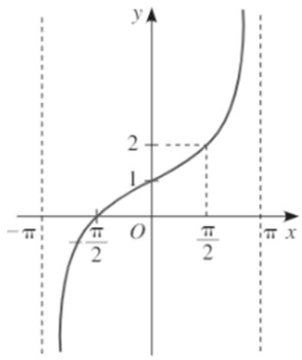
16.2. $g(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right) + 1$

17. Determine a expressão geral dos zeros das funções definidas por:

17.1. $f(x) = \tan(2x)$

17.2. $g(x) = \tan(x + \pi)$

18. Na figura ao lado está representada em referencial o.n. parte do gráfico de uma função de domínio $]-\pi, \pi[$ definida por $f(x) = a + \tan(bx)$, em que a e b são números reais. Determine o valor de valor de a e de b.



19. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2 - \tan x$.

19.1. Determine $f\left(\frac{11}{4}\right)$.

19.2. Sabendo que $\beta \in]\pi, 2\pi[$ e que $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ determine o valor exato de $f(\beta)$.

20. Prove que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x = \cos x$$

21. Simplifique a seguinte expressão:

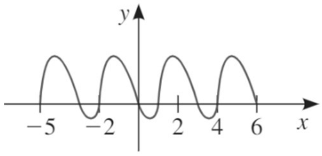
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right), com\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Soluções

1.

1.1. Os zeros são: $-2, 0, 1, 3, 4$

1.2.



2.

2.1. Os zeros são: $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ e 0

2.2. 4

2.3. -4

3.

3.1. $f(x+\pi) = \sin\big(2(x+\pi)\big) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$

3.2. $g(x+\pi) = \cos\big(6(x+\pi)\big) \cos(6x + 6\pi) = \cos(6x + 3 \times 2\pi) = \cos(6x) = g(x)$

4.

4.1. $D'_f = [2, 4]$

4.2. $D'_g = [-2, 2]$

5.

5.1. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

5.2. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5.3. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

6.

6.1. $A_{[OABC]} = base \times altura = 1 \times \sin x, x \in \,]0, \pi[$

6.2. $A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ u.a.$

6.3. $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ u.a.$ Obtém-se um quadrado de lado $1\ u.c.$

6.4. O valor máximo da área é $1\ u.a.$ e, como tal, o losango tem área máxima quando $x = \frac{\pi}{2}$, pois esse é o valor máximo da função $\sin x$, que dá a área do losango.

7.

7.1. A função f não admite zeros, uma vez que $D'_f = [2, 4]$.

7.2. $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

7.3. $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. Portanto, f não é par nem ímpar.

8. ---

9. $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\sin(-x) + 2\cos x = \frac{1-4\sqrt{6}}{5}$

10.

10.1. $-\sin x + \cos x$

10.2. $\tan x$

11. $\cos x = -\frac{2}{3}$

11.1. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

11.2. $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$

12. $A(-\cos x, -\sin x), logo \sin x = 0{,}6$

12.1. $0{,}8$

12.2. $-0{,}75$

12.3. $-0{,}6$

13.

13.1. $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

13.2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

13.3. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}$

14. $\cos x = \frac{3}{4}; \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}; logo, \sin(\pi - x) + 2\tan x = -\frac{11\sqrt{7}}{12}$

15.

15.1. $4\sqrt{3}\ u.a.$

15.2. ---

15.3. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

16.

16.1. $D_f = \left\{x : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

período fundamental: $\frac{\pi}{2}$

16.2. $D_f = \left\{x : x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

período fundamental: 3π

17.

17.1. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

17.2. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

18. $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$, logo $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$ (pois a dilatação horizontal tem razão 2)

19.

19.1. 3

19.2. $\sin\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}; logo\ f(\beta) = 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

20. ---

21. $-\cos x$