Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Generalização das definições das razões trigonométricas a ângulos orientados e generalizados

1. Considere um referencial ortonormado direto xOy do plano.
Indique o quadrante onde se encontra o lado extremidade do ângulo orientado que tem como origem o semieixo positivo Ox e amplitude:

   1.1. $130º$ 1.2. $250º$ 1.3. $-80º$ 1.4. $-210º$

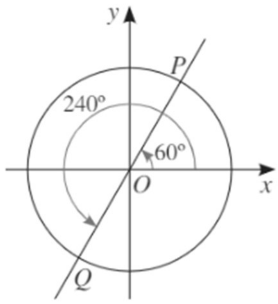
2. Num referencial o.n. direto xOy, considere os pontos $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ e $B\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Sejam α e β ângulos orientados que têm como lados extremidade as semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$, respetivamente, e lado origem o semieixo positivo Ox.

   2.1. Verifique que os segmentos de reta $[OA]$ e $[OB]$ têm comprimento 1.

   2.2. Determine:

      2.2.1. $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ 2.2.2. $\frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\beta}$

3. Na figura ao lado estão representados a circunferência trigonométrica e os pontos P e Q, pontos de interseção da circunferência com os lados extremidade dos ângulos de amplitude $60º$ e $240º$, respetivamente.

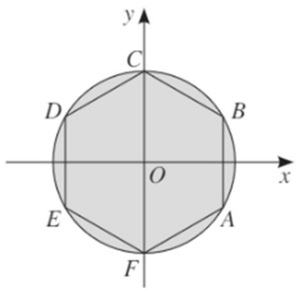


   3.1. Indique a rotação de centro em O para a qual a imagem de P é Q.

   3.2. Justifique que as coordenadas dos pontos P e Q são simétricas.

   3.3. Indique as coordenadas dos pontos P e Q.

4. Considere o hexágono regular da figura, inscrito na circunferência de centro em O e raio 1, tal que $[AB]$ é paralelo a Oy.
Tendo por base as amplitudes dos ângulos formados entre as semirretas $\dot{O}A$, $\dot{O}B$, $\dot{O}D$ e $\dot{O}E$ e o semieixo positivo Ox, determine as coordenadas dos pontos A, B, D e E.



5. Represente, na circunferência trigonométrica, ângulos do 3º ou 4º, quadrantes, para os quais:

   5.1. O seno é igual a $-\frac{1}{3}$.

   5.2. O cosseno é igual a $-\frac{1}{2}$.

   5.3. O cosseno é igual a $\frac{1}{2}$.

6. Determine o valor exato de:

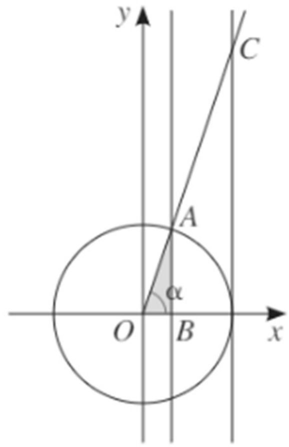
   6.1. $\sin\alpha$, com $\hat{\alpha} = 240º$

   6.2. $\cos\beta$, com $\hat{\beta} = -150º$

   6.3. $\sin\gamma - \sin\delta$, com $\hat{\gamma} = 270º$ e $\hat{\delta} = -90º$

7. Na figura estão representados, em referencial o.n. direto xOy, a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x = 1$ e um ângulo α do 1º quadrante:

- O ponto C tem de coordenadas $(1, 3)$;
- $\dot{O}C$ é a semirreta extremidade do ângulo α.



7.1. Indique o valor de $\tan \alpha$.

7.2. Determine a equação reduzida da reta OC.

7.3. Calcule as coordenadas de A, ponto de interseção da reta OC com a circunferência.

7.4. Determine a área do triângulo $[AOB]$.

8. Represente, na circunferência trigonométrica, um ângulo $\hat{\alpha} \in [0, 360]$ que verifique a condição:

8.1. $\tan \alpha = 1$ **8.2.** $\tan \alpha = -2$ **8.3.** $\tan \alpha = -0{,}25$

9. Represente num referencial o.n. direto um ângulo orientado α positivo tal que:

9.1. $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\cos \alpha > 0$ **9.2.** $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\tan \alpha < 0$

10. Determine o valor exato de :

10.1. $\sin 450º + \cos 900º$

10.2. $\cos 120º - \sin(-240º)$

10.3. $\cos(-510º) - 2\tan 1800º$

10.4. $\tan(-840º) - \sin 495º$

11. Indique a que quadrante pertence o ângulo α para que cada afirmação seguinte seja verdadeira:

11.1. $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$

11.2. $\frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} > 0$

11.3. $\sin \alpha \times \tan \alpha > 0$

12. Considere o ângulo generalizado $\theta = (\alpha, 1)$. Sabe-se que:

- $\cos \theta = -\frac{3}{5}$
- $\hat{\alpha} \in]180, 360[$, em que $\hat{\alpha}$ é a amplitude em graus de α.

12.1. Determine o seno e a tangente de θ.

12.2. Indique, recorrendo à calculadora, um valor aproximado às unidades da amplitude de θ.

Soluções

1.

1.1. 2º quadrante
1.2. 3º quadrante
1.3. 4º quadrante
1.4. 2º quadrante

2.

2.1. $\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

$\overline{OB} = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$

2.2.

2.2.1. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

2.2.2. $\frac{81}{8}$

3.

3.1. Rotação de centro em O e amplitude 180º

3.2. A rotação de centro em O e amplitude 180º corresponde a uma reflexão central em relação à origem; logo, as coordenadas de P e Q são simétricas.

3.3. $P(\cos 60º, \sin 60º)$, isto é, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$Q(\cos 240º, \sin 240º)$, isto é,

$Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

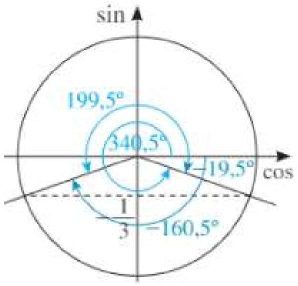
4. $A(\cos -30º, \sin -30º)$, isto é, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$B(\cos 30º, \sin 30º)$, isto é, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

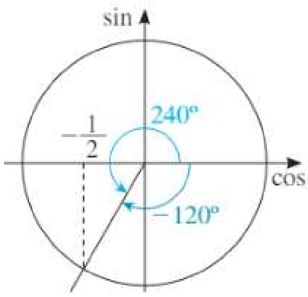
$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

5.

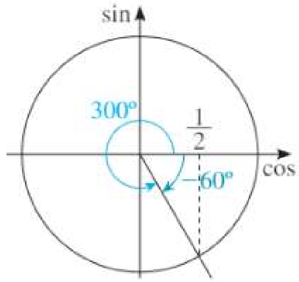
5.1.



5.2.



5.3.



6.

6.1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.3. 0

7.

7.1. 3

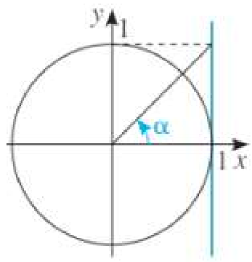
7.2. $y = 3x$

7.3. $A\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

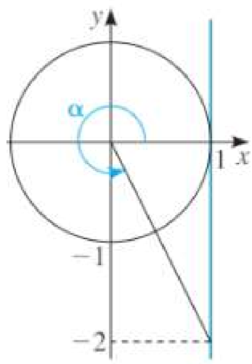
7.4. $\frac{3}{20}$ $u.a.$

8.

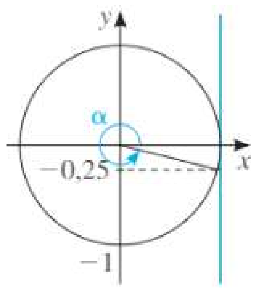
8.1. $\hat{\alpha} = 45º$



8.2. $\hat{\alpha} \approx 297º$

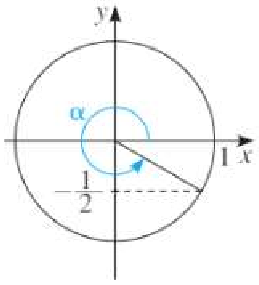


8.3. $\hat{\alpha} \approx 346º$

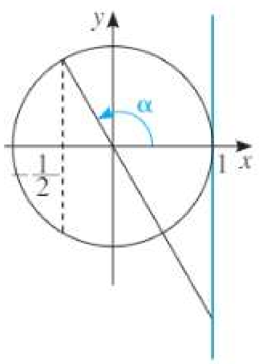


9.

9.1.



9.2.



10.

10.1. 0

10.2. $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

10.3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.4. $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

11.

11.1. 2º ou 4º quadrante

11.2. 1º ou 3º quadrante

11.3. 1º ou 4º quadrante

12.

12.1. $\sin\theta = -\frac{4}{5}$; $\tan\theta = \frac{4}{3}$

12.2. $\theta \approx 593º$