Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Princípio da indução matemática

1. Prove, por indução matemática, que é verdadeira a seguinte propriedade:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i-1}^{n} (6i - 3) = 3n^2$$

2. Prove, por indução matemática, que são verdadeiras as seguintes propriedades:
   - 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}_2, 3^n > 2^{n+1}$
   - 2.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k-1}^{n} (k+1) = \frac{n(n+3)}{2}$
   - 2.3. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 5n$ é divisível por 3
   - 2.4. $\forall n \in \mathbb{N}_4, 2^n > 3n$

3. Seja $P(n)$ a seguinte condição:

$$\sum_{k-1}^{n} k = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

   - 3.1. Prove que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.
   - 3.2. Pode-se concluir que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ é verdadeira? Justifique a sua resposta.

Soluções

1.

Considere-se a condição $P(n)\colon \sum_{i=1}^{n}(6i-3)=3n^2$.

A proposição $P(1)$ é $6\times 1-3=3\times 1$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n}(6i-3)=3n^2$.

Tese: $\sum_{i=1}^{n+1}(6i-3)=3(n+1)^2$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(6i-3)=\sum_{i=1}^{n}(6i-3)+(6(n+1)-3)$$

Usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(6i-3)=3n^2+(6(n+1)-3)=3n^2+6n+3=$$
$$=3(n^2+2n+1)=3(n+1)^2$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n}(6i-3)=3n^2$$

é verdadeira.

2.

2.1.

Considere-se a condição $P(n)\colon 3^n>2^{n+1}$.

A proposição $P(2)$ é $3^2>2^{2+1}$, que é verdade, pois $9>8$.

Hipótese: Para um certo $n\in\mathbb{N}_2$, $3^n>2^{n+1}$.

Tese: $3^{n+1}>2^{n+2}$

Demonstração:

$$3^{n+1}=3^n\times 3$$

Usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$3^{n+1}>2^{n+1}\times 3>2^{n+1}\times 2=2^{n+2}$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição

$$\forall\, n\in\mathbb{N}_2, 3n>2^{n+1}$$

é verdadeira.

2.2.

Considere-se a condição $P(n)\colon \sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{n(n+3)}{2}$.

A proposição $P(1)$ é $1+1=\frac{1(1+3)}{2}$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{n(n+3)}{2}$.

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)=\frac{(n+1)(n+4)}{2}$

Demonstração:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)+(n+1+1)$$

Usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1) = \frac{n(n+3)}{2} + (n+1+1) =$$
$$= \frac{n(n+3)+2(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2n+4}{2} =$$
$$= \frac{n^2+4n+n+4}{2} = \frac{n(n+4)+n+4}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

é verdadeira.

2.3.

Considere-se a condição $P(n)$: « $n^3 + 5n$ é divisível por 3 » .

A proposição $P(1)$ é « $1^3 + 5$ é divisível por 3 » , que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, « $n^3 + 5n$ é divisível por 3 » .

Tese: « $(n+1)^3 + 5(n+1)$ é divisível por 3 »

Demonstração:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n+1)(n^2+2n+1) + 5n + 5 =$$
$$= n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 5n + 5 =$$
$$= (n^3+5n) + 3n^2 + 3n + 6 = (n^3+5n) + 3(n^2+n+2)$$

Tem-se que $(n+1)^3 + 5(n+1)$ é a soma de dois múltiplos de 3
($n^3 + 5n$ que por hipótese de indução é múltiplo de 3 e $3(n^2+n+2)$) .

Logo, $(n+1)^3 + 5(n+1)$ é divisível por 3 .

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição
« $n^3 + 5n$ é divisível por 3 » é verdadeira.

2.4.

Considere-se a condição $P(n)$: $2^n > 3n$.

A proposição $P(4)$ é $2^4 > 3 \times 4$, o que é verdade, pois $16 > 12$.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}_4$, $2^n > 3n$.

Tese: $2^{n+1} > 3(n+1)$

Demonstração:

$$2^{n+1} = 2^n \times 2$$

Usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$2^{n+1} > 3n \times 2 > 3n + 3 = 3(n+1)$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_4, 2^n > 3n$$

é verdadeira.

Em alternativa:

Considere-se a condição $P(n)$: $3n \times 2 = 3n + 3n > 3n + 3$.

Como $6n > 3n + 3 \Leftrightarrow n > 1$, obtém-se uma condição universal em $\mathbb{N}_4$.

3.

3.1.

Suponha-se que $P(n)$ se verifica, ou seja, que para $n \in \mathbb{N}$ se tem:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{2}$

Tem-se que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$; logo, usando a hipótese:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + (n+1) = \frac{(n-1)(n+2)+2n+2}{2} =$$

$$= \frac{n^2+2n-n-2+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

Portanto, $P(n+1)$ também se verifica.

3.2.

Não, porque $P(1)$ é falsa: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 \neq 0 = \frac{(1-1)(1+2)}{2}$.