Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Resolução de inequações de grau superior ao primeiro

Para resolver inequações de grau superior ao primeiro deve-se:

1. Escrever a inequação na forma $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \geq 0$ ou $P(x) \leq 0$.
2. Fatorizar o polinómio $P(x)$.
3. Elaborar um quadro de sinal com os fatores do produto.
4. Analisar o quadro e definir o conjunto solução.

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

1.1. $(x-4)x-5<0$

1.2. $-2x^3-7x^2-3x \geq 0$

1.3. $(x^2+4)(2x+1)<0$

1.4. $(3x+2)^2+5<0$

1.5. $x^2+4x<-3$

1.6. $3x^2+9x \geq 0$

1.7. $x(3x+10) \leq 8$

1.8. $x^2(-2x-1)+x \leq 0$

1.9. $(x-1)^2(2x+51)>0$

2. Na figura está representado o quadro de sinal de um polinómio $P(x)$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Resolva as condições:

2.1. $P(x)(x-1)<0$

2.2. $xP(x)>0$

2.3. $(x-1)^2P(x) \leq 0$

3. Considere os quadros de sinais seguintes, que representam o sinal dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$:

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$+$	0	-

3.1. Indique os valores de x para os quais $P(x) \times Q(x) > 0$.

3.2. Sabendo que o polinómio $P(x)$ é de grau 3 e $P(-2)=4$, defina-o analiticamente.

4. Considere $P(x)$ um polinómio do terceiro grau comum único zero e tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$$

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

4.1. $P(x) \leq 0$

4.2. $P(x) \times (-x + 1) \leq 0$

4.3. $-P(x) \times x^2 \geq 0$

4.4. $(x^2 - 6x + 8)P(x) > 0$

5. Considere o seguinte polinómio $P(x) = -2x^3 - 10x^2 - 6x + 18$.

5.1. Prove que -3 é um zero duplo do polinómio.

5.2. Resolva analiticamente a inequação $P(x) \geq 0$.

Equação biquadrada

Chama-se **equação biquadrada** a toda a equação que se pode reduzir à forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b e c números reais diferentes de zero.

Fazendo a mudança de variável $y = x^2$, tem-se que:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + c = 0$$

6. Considere o polinómio $P(x) = x^4 + 4x^2 - 32$. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

6.1. $P(x) > 0$

6.2. $P(x)(-2x + 1) \leq 0$

7. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

7.1. $x^4 + 5x^2 - 6 \geq 0$

7.2. $x^2(2x^2 + 3) \leq 2$

7.3. $x^4 - 3\sqrt{2}x^2 + 4 > 0$

Soluções

1.

1.1. $S =]-1, 5[$

1.2. $S =]-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

1.3. $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

1.4. $S = \emptyset$

1.5. $S =]-3, -1[$

1.6. $S =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$

1.7. $S = \left[-4, \frac{2}{3}\right]$

1.8. $S = [-1, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

1.9. $S = \left]-\frac{51}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$

2.

2.1. $S =]0, 1[$

2.2. $S = \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$

2.3. $S =]-\infty, 0] \cup \{1, 2\}$

3.

3.1. $S =]-1, 0[\cup]0, 2[\cup]5, +\infty[$

3.2. $P(x) = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2) \Leftrightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

4.

4.1. $S = [1, +\infty[$

4.2. $S = \{1\}$

4.3. $S = \{0\} \cup [1, +\infty[$

4.4. $S =]-\infty, 1[\cup]2, 4[$

5.

5.1. (pela regra de Ruffini)

5.2. $S =]-\infty, 1]$

6.

6.1. $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

6.2. $S = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[$

7.

7.1. $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

7.2. $S = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

7.3. $S = \left]-\infty, -\sqrt[4]{8}\right[\cup \left]-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right[\cup \left]\sqrt[4]{8}, +\infty\right[$