Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Operações com funções

1. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = 3 - x^2 \qquad g(x) = 3\sqrt{x} - 1$$

Calcule:

1.1. $(f - g)(4)$

1.2. $(g - f)(1)$

1.3. $(f \times g)\left(\frac{1}{4}\right)$

1.4. $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

2. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = 2 - \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2 - 4$$

2.1. Determine:

2.1.1. $(f + g)(2)$

2.1.2. $(f \times g)(4)$

2.1.3. $\frac{g}{f}(1)$

2.2. Caracterize $\frac{f}{g}$.

3. Considere as funções

$$f: [-2, 4[\to \mathbb{R} \qquad e \qquad g:]0, 5] \to \mathbb{R}$$

definidas por:

$$f(x) = 1 - 3x \qquad g(x) = 2x + 1$$

3.1. Determine o domínio de $f + g$ e uma expressão para $(f + g)(x)$.

3.2. Calcule $(f \times g)(1)$.

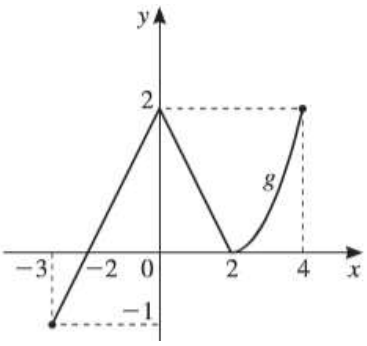
3.3. Construa um quadro de sinais para a função $f \times g$.

4. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \qquad g(x) = x - 3$$

Determine os domínios de $\frac{f}{g}$ e de $\frac{g}{f}$.

5. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ e a função $g: [-3, 4] \to \mathbb{R}$ representada em referencial o.n. xOy na figura.

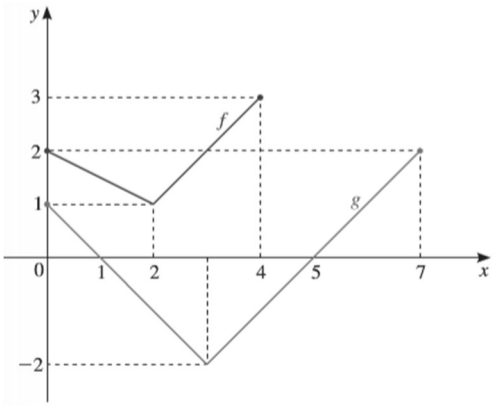


5.1. Indique o domínio e o contradomínio da função definida por $h(x) = 3g(x)$.

5.2. Determine o domínio da função $g \circ f$ e indique a transformação geométrica que transforma o gráfico de f no gráfico de $g \circ f$.

5.3. Determine o domínio da função $f^{\frac{2}{3}}$.

6. Na figura seguinte estão representadas em referencial ortogonal duas funções f e g.



6.1. Indique o domínio de cada uma das funções.

6.2. Indique o domínio de $f+g$ e calcule $(f+g)(0)$.

6.3. Sabendo que a expressão analítica da função g é da forma $a|x-b|+c$, determine uma expressão analítica para g.

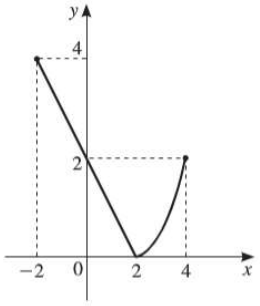
6.4. Indique o domínio de $\frac{f}{g}$ e calcule:

6.4.1. $\frac{f}{g}(0)$

6.4.2. $\frac{f}{g}(4)$

6.5. Indique o domínio de $\sqrt{f \times g}$.

7. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função f.



7.1. Indique o domínio e o contradomínio de f.

7.2. Indique o domínio da função g, definida por $g(x)=f(-x)$.

7.3. Calcule $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$.

7.4. Determine o domínio de $\frac{f}{g}$.

7.5. Justifique que, no seu domínio, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2-x}{x+2}$.

8. Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=|x-2| \qquad g(x)=2-\sqrt{5-x}$$

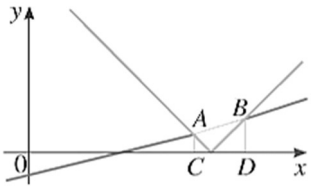
8.1. Determine o domínio e os zeros de g.

8.2. Calcule:

8.2.1. $(f-g)(1)$ **8.2.2.** $g \circ f(-2)$ **8.2.3.** $f \circ g(4)$

8.3. Determine o domínio de $g \circ f$.

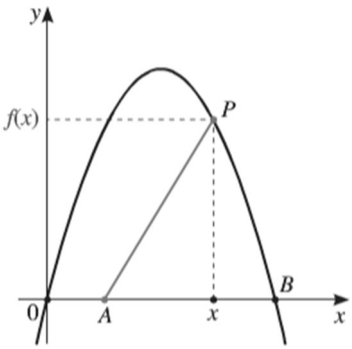
8.4. Na figura seguinte estão representados, em referencial o.n. do plano, parte dos gráficos de f e g, bem como os pontos A, B, C e D.
Os pontos A e B são os únicos pontos de interseção dos gráficos de f e g.
Os pontos C e D são pontos do eixo Ox com a mesma abcissa de A e B, respetivamente.



8.4.1. Com recurso à calculadora gráfica, determine, com valores aproximados às milésimas, as coordenadas dos pontos A e B, explicando o procedimento utilizado.

8.4.2. Determine a área do trapézio $[ADCB]$, apresentando o resultado aproximado às centésimas.

9. Na figura seguinte estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f, definida por $f(x)=-x^2+4x$ e o ponto $A(1,0)$.
Considere a função g, que associa a cada x a distância entre A e o ponto P do gráfico de f, de abcissa x.

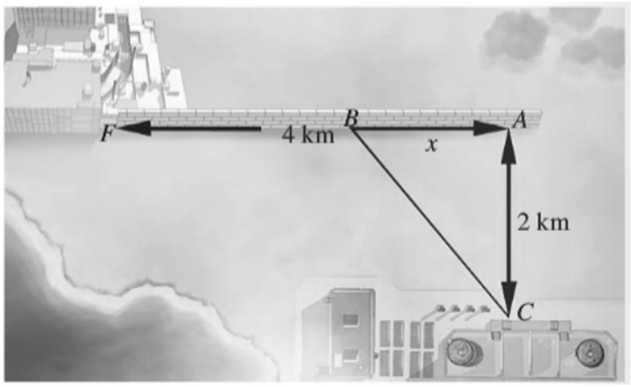


9.1. Prove que, para todo x, $g(x)=\sqrt{x^4-8x^3+17x^2-2x+1}$.

9.2. Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor, aproximado às décimas, da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.

9.3. Existe um ponto em que os gráficos de f e g se intersetam. Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

10. Pretende-se ligar uma fábrica F a uma central de tratamento de resíduos C, por meio de uma conduta, localizadas de acordo com a figura.



- A conduta deve seguir ao longo do muro até um certo ponto B, e daí deve seguir em linha reta até à central de tratamento.
- Seja A o ponto do muro mais próximo da central. A distância da fábrica ao ponto A é de $4\ km$ e a distância deste ponto A à central é de $2\ km$.
- Designou-se por x a distância entre A e B.
- O preço de colocação da conduta é:
  - 15 mil euros por quilómetro, ao longo do muro;
  - 25 mil euros por quilómetro, do muro à central.

10.1. Qual é o preço da conduta se a mesma for colocada em linha reta, da fábrica para a central?

10.2. Obtenha uma função que a cada valor de x faça corresponder o preço total p de colocação da conduta, em milhares de euros.

Sugestão: comece por escrever $\overline{FB}$ e $\overline{BC}$ em função de x.

10.3. Determine o valor de x para o qual o preço de colocação da conduta é igual a 100 mil euros.

10.4. Prove que $p(x) \geq 100, \forall x \in D_p$ e conclua que 100 mil euros é o preço mínimo de colocação da conduta.

Soluções

1.

1.1. $f(4) - g(4) = -18$

1.2. $g(1) - f(1) = 0$

1.3. $f\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{47}{32}$

1.4. $\frac{f(0)}{g(0)} = -3$

2.

2.1.

2.1.1. $f(2) + g(2) = 2 - \sqrt{2}$

2.1.2. $f(4) \times g(4) = 0$

2.1.3. $\frac{g(1)}{f(1)} - 3$

2.2. $D_f = \mathbb{R}_0^+$ e $D_g = \mathbb{R}$ e $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \backslash \{2\}$

Portanto: $\frac{f}{g} : \mathbb{R}_0^+ \backslash \{2\} \to \mathbb{R}$

$$x \hookrightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 4}$$

3.

3.1. $D_{f+g} = D_f \cap D_g =]0, 4[$

$(f + g)(x) = -x + 2$

3.2. $f(1) \times g(1) = -6$

3.3.

x	0		$\frac{1}{3}$		4
$f(x)$	+	+	0	−	n. d.
$g(x)$	n. d.	+	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	n. d.	+	0	−	n. d.

4. $D_f = [-3, 3]$ e $D_g = \mathbb{R}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = [-3, 3[$

$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} =]-3, 3[$

5.

5.1. $D_h = [-3, 4]$ e $D'_h = [-3, 6]$ Nota: $g(x) = x + 2$ para $x \in]-3, 0]$

5.2. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : 2x \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq 2x \leq 4\} = \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$

A transformação geométrica para a qual $g \circ f$ é a imagem geométrica do gráfico de f é a contração horizontal de coeficiente 2.

5.3. $f^{\frac{2}{3}}(x) = [f(x)]^{\frac{2}{3}} = (2x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4x}$, logo, $D = \mathbb{R}$

6.

6.1. $D_f = [0, 4]$ e $D_g = [0, 7]$

6.2. $D_{f+g} = [0, 4]$; $f(0) + g(0) = 3$

6.3. Por observação do gráfico temos que $b = 3$ e $c = -2$; $g(0) = 1$. Logo, $g(x) = |x - 3| - 2$

6.4.

6.4.1. $\frac{f(0)}{g(0)} = 2$

6.4.2. $\frac{f(4)}{g(4)} = -3$

6.5. O domínio de $\sqrt{f \times g}$ é dado por $(f \times g)(x) \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 4$.

Recorrendo ao quadro de sinais temos que $D_{\sqrt{f \times g}} = [0, 1]$

x	0		1		4
$f(x)$	+	+	+	+	+
$g(x)$	+	+	0	−	−
$\sqrt{(fg)(x)}$	+	+	0	−	−

7.

7.1. $D_f = [-2, 4] \quad e \quad D'_f = [0, 4]$

7.2. A função g é uma reflexão de f em torno do eixo Oy, portanto $D_g = [-4, 2]$.

7.3. $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$

7.4. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = [-2, 4] \cap [-4, 2] \backslash \{-2\} =]-2, 2]$

7.5. No intervalo $]-2, 2]$ tem-se que $f(x) = -x + 2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{-x+2}{x+2} = \frac{2-x}{x+2}$$

8.

8.1. $D_g =]-\infty, 5]$; zeros: 1

8.2.

8.2.1. $(f - g)(1) = 1$

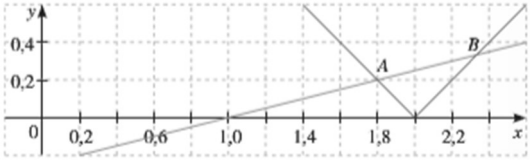
8.2.2. $g \circ f(-2) = 1$

8.2.3. $f \circ g(4) = 1$

8.3. $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = [-3, 7]$

8.4.

8.4.1. Os pontos de interseção aproximados às milésimas são: $A(1{,}791; 0{,}209)$ e $B(2{,}382; 0{,}382)$.



8.4.2. $A_{trapézio} = \frac{(\overline{BD} + \overline{AC}) \times \overline{CD}}{2} \approx 0{,}17\ u.a.$

9.

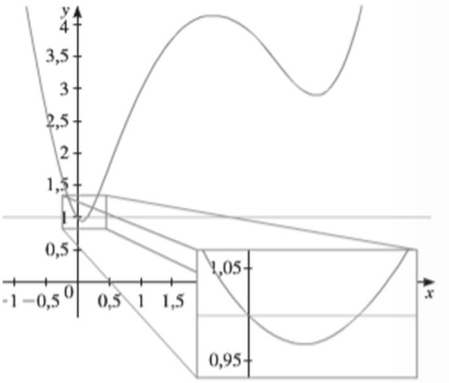
9.1. Consideremos o triângulo $[APX]$ e apliquemos o Teorema de Pitágoras, de modo a obter a expressão de $g(x)$.

$\overline{AP}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{PX}^2 = (x-1)^2 + (-x^2 + 4x)^2 = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$

Então, para todo x, $g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$

9.2. Como $g(0) = 1$, então, um dos pontos de interseção é $(0{,}1)$.

Com a ajuda da calculadora, obtemos o ponto de interseção $(0{,}1; 1)$



9.3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

Quando $x = 1$, as duas funções têm a mesma imagem $f(1) = 3$; ou seja, quando $x = 1$, a distância é 3.

Como, para $x = 1$, a distância é medida na vertical, o seu valor coincide com o valor de $f(1)$.

10.

10.1. $\overline{FA} = 4\ km$ e $\overline{AC} = 2\ km$; pelo Teorema de Pitágoras, tem-se: $\overline{FC} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ km$

O custo seria de $50000\sqrt{5}$ euros.

10.2. $\overline{FB} = 4 - x$ e $\overline{BC} = \sqrt{4 + x^2}$; então:

$p(x) = 15(4 - x) + 25\sqrt{4 + x^2} = 60 - 15x + 25\sqrt{4 + x^2}$

10.3. $p(x) = 100 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; Como $p\left(\frac{3}{2}\right) = 100$, temos $x = \frac{3}{2}\ km$

10.4. $p(x) \geq 100 \Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} \geq 8 + 3x$

Como $x \geq 0$, ambos os membros da desigualdade são não negativos.

Então, elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado, obtemos: $25(4 + x^2) \geq 9x^2 + 48x + 64 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Portanto, a condição $p(x) \geq 100$ é universal em $[0, +\infty[$ e 100 é o mínimo absoluto de p.