**1.** Determine os zeros e estude o sinal de cada uma das funções cuja expressão

analítica se indica.

**1.1.**  **1.2.** 

**1.3.**  **1.4.** 

**2.** Calcule os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

**2.1.**  **2.2.** 

**2.3.**  **2.4.** 

**2.5.**  **2.6.** 

**2.7.**  **2.8.** 

**2.9.**  **2.10.** 

**2.11.**  **2.12.** 

**2.13.**  **2.14.** 

**3.** Determine, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico das funções definidas

por cada uma das expressões seguintes:

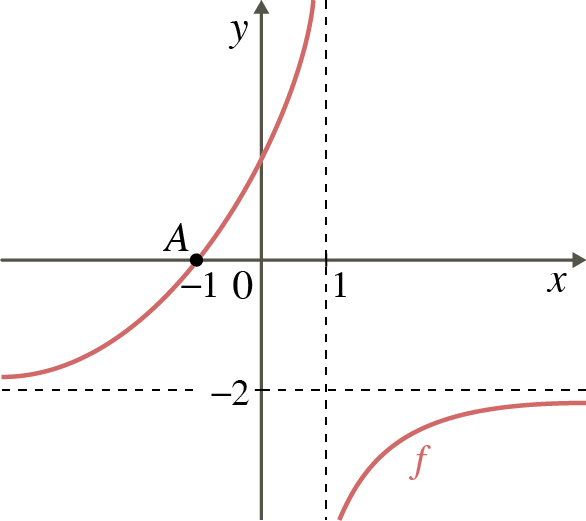
**3.1.**  **3.2.**  **3.3.** 

**4.** Determine o valor de *k* de modo que a função *f* real de variável real definida por:



seja contínua em .

**5.** O gráfico junto representa uma função racional *f* do tipo .

 Sabe-se que as retas de equações  e  são as assíntotas ao gráfico e que este interseta o eixo *Ox* no ponto .

**5.1.** Prove que .

**5.2.** Qual é o conjunto-solução da condição ?

**5.3.** Resolva a condição , sendo  a derivada da função *f*.

Apresente a resposta na forma de intervalo ou união de intervalos disjuntos de números reais.

**6.** Um ponto *P* move-se numa reta de tal forma que, em cada instante *t* (em segundos) a distância *d* (em cm) à origem *O* é dada pela expressão:



Sabe-se que a velocidade média do ponto *P* nos dois primeiros segundos é igual –11 cm/s.

Determine o valor de *a*.

**7.** Considere a função *f*, real de variável real, de domínio  definida por:



**7.1.** Determine os intervalos de monotonia e identifique os extremos relativos e absolutos da função *f*.

**7.2.** Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa .

**Ficha de preparação para o teste de avaliação 4**

**1.1.** ■ Zeros de *f* :













Portanto, os zeros de *f* são: –3, 0 e 3

■ Sinal de *f* :



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | −∞ | –3 |  | 0 |  | 1 |  | 3 |  | 9 | +∞ |
| *A* | – | – | – | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| *B* | – | 0 | + | + | + | + | + | 0 | – | – | – |
| *C* | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| *F* | + | + | + | + | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
|  | + | 0 | – | 0 | + | n.d. | – | 0 | + | n.d. | – |

*A: ; B: ; C: ;*

*D: : F: *







**1.2.** ■ Zeros de *g*:

















 Portanto, os zeros de *g* são: –4 e 1.

■ Sinal de *g*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | –4 |  | –2 |  | 1 |  | 2 |  |
| *N* | + | 0 | – | – | – | 0 | + | + | + |
| *D* | + | + | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
| *F* | + | 0 | – | n.d. | + | 0 | – | n.d. | + |

*N: ; D: ; F: *

Logo:







**1.3.** ■ Zeros de *h*



 **(1)**

O polinómio  se tiver raízes inteiras são divisores do termo independente –5, pelo que esses divisores são –5, –1, 1 e 5.

Para :, logo –1 é raiz deste polinómio.

Usando, agora, a regra de Ruffini:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1 | –5 | –5 |
| –1 |  | –1 | 0 | 5 |
|  | 1 | 0 | –5 | 0 |

Assim, .

Voltando a **(1)**:











Portanto, os zeros de *h* são  e .

■ Sinal de *h*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | –1 |  |  |  |
| *A* | – | – | – | 0 | + | + | + |
| *B* | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
| *C* | + | + | + | 0 | + | + | + |
| *F* | – | 0 | + | n.d. | – | 0 | + |

*A: ; B: ; C: ; F: *

Logo, 





**1.4.** ■ Zeros de *j*:

















Portanto, a função *j* tem apenas um zero: 0

■ Sinal de *j*:



 **(1)**

Usando a regra de Ruffini vamos decompor em fatores o polinómio , partindo do conhecimento que 2 é uma raiz deste polinómio.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | –8 |
| 2 |  | 2 | 4 | 8 |
|  | 1 | 2 | 4 | 0 |

Portanto, 

O polinómio  não tem raízes reais.

Voltando a **(1)**:







|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | −∞ | –2 |  | 0 |  | 1 |  | 2 | +∞ |
| *A* | – | – | – | 0 | + | + | + | + | + |
| *B* | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| *C* | + | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| *F* | – | n.d. | – | 0 | + | n.d. | + | n.d. | + |

*A:  ; B:  C:  F: *

Logo:







**2.1.** 

**2.2.** 

**2.3.** 



**2.4.** 





**2.5.**

****



**2.6.** 















**2.7.**  



**2.8.** 

**2.9.** 

Recorrendo à regra de Ruffini:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | –1 | 5 | 6 |
| –1 |  | 1 | –6 |
|  | –1 | 6 | 0 |



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | –7 | –6 |
| –1 |  | –1 | 1 | 6 |
|  | 1 | –1 | –6 | 0 |







Portanto, .



**2.10. **









**2.11.** 

 ( só está definida para )





**2.12.** 









O domínio da função  é .







**2.13.** 





**2.14.** 



**3.1.** 

A função *f* é contínua pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: ambas são funções polinomiais.

–2 não pertence ao domínio de *f* mas é ponto aderente a este conjunto.

Assim, .

 e 

Portanto, a reta de equação *x* = –2 é a única assíntota vertical ao gráfico de *f* .

Vamos, agora, determinar as assíntotas não verticais.

• Em :

Logo,  é a equação reduzida da assíntota ao gráfico de *f* em  .

• Em  , efetuando cálculos análogos aos de  , obtemos:

 e 

Logo,  é a equação reduzida da assíntota no gráfico de *f* em  .

Conclusão:  e  são as equações das assíntotas ao gráfico de *f* .

**3.2.**    


 e 

Temos, ainda, que .

Portanto,  , pelo que existe  e consequentemente a função *g* é contínua em *x* = 3 .

Assim, –1 é o único ponto aderente que não pertence ao domínio de *g* .

 e 

Assim, a reta de equação *x* = –1 é a única assíntota vertical ao gráfico de *g* .

Determinemos, agora, as assíntotas não verticais.

• Em :







Logo, a reta de equação *y* = 2 é assíntota ao gráfico de *g* em  .

• Em :







Logo, a reta de equação *y* = –2 é assíntota ao gráfico de *g* em  .

Conclusão:  são as equações das assíntotas ao gráfico de *g* .

**3.3.**  , pois a condição  é universal em .

A função *h* é contínua pois é a raiz quadrada de uma função quadrática.

O gráfico de *h* não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

• Em :

















Logo, a reta de equação  é assíntota ao gráfico de *h* em  .

• Em : 













Logo, a reta de equação  é assíntota ao gráfico de *h* em  .

Conclusão: O gráfico de *h* não admite assíntotas verticais.

 e  são as equações das assíntotas ao gráfico de *h*.

**4.** A função *f* é contínua em *x* = –1 quando existe  e este existe quando .







Logo, .

Portanto, .

**5.1.** Como a reta de equação *y* = –2 é a assíntota ao gráfico de *f* em  e em  , temos que 

Por outro lado, a reta de equação  é a assíntota vertical ao gráfico de *f* , logo  , ou seja, . 

Como :



Portanto, ,  e , logo:



Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, vem que:

|  |  |
| --- | --- |
| -6*x* – 6 | 3*x* – 3 |
| 6*x* – 6 | –2 |
| –12 |  |

Assim,  , isto é, 

**5.2.** 

**5.3.** 







• Zeros do numerador:

• Zeros do denominador: 

Construindo uma tabela se sinal, temos:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | −∞ |  |  | 1 |  |  | +∞ |
| *N* | – | 0 | + | + | + | 0 | – |
| *D* | + | + | + | 0 | + | + | + |
| *F* | – | 0 | + | n.d. | + | 0 | – |

*N: D: F:*

Portanto:





**6.** A velocidade média do ponto *P* nos dois primeiros segundos é dada por  . Por outro lado, esta velocidade é igual a –11 cm/s. Portanto:









**7.1.** 

Determinemos os zeros de:





Construindo uma tabela de variação:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | −∞ | –2 |  |  | +∞ |
|  | + | 0 | – | 0 | + |
| *f* |  |  |  |  |  |
|  |  | Máx. |  | Mín. |  |

Intervalos de monotonia: *f* é estritamente crescente em  e em  e é estritamente decrescente em  .

Extremos:

máximo absoluto: não existe

máximo relativo: 

mínimo absoluto: não existe

mínimo relativo: 

**7.2.** Uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *x* = 1 é:



 e 

