Matemática A 12.º ano

CADERNO DE PREPARAÇÃO
PARA O EXAME NACIONAL

Componentes do projeto:

Manual do aluno
Caderno de Preparação para o Exame Nacional (oferta ao aluno)
Caderno de atividades
Livromédia
O Teu Mestre (vídeos com a resolução de exercícios
de provas de Exame Nacional — oferta incluída no Livromédia)

Este caderno é oferecido com a compra do manual
e não pode ser vendido separadamente.

SANTILLANA CONSTÂNCIA

acordo ortográfico
Conforme o novo **Acordo Ortográfico** da língua portuguesa

Projeto **Desafios**

Matemática A

12.º ano

CADERNO DE PREPARAÇÃO PARA O EXAME NACIONAL

Paulo Cruchinho
Consultor científico: Manuel Almeida Silva

OFERTA AO ALUNO

Projeto **Desafios**

SANTILLANA CONSTÂNCIA

Matemática A

CADERNO DE PREPARAÇÃO PARA O EXAME NACIONAL

12.º ano

Projeto Desafios

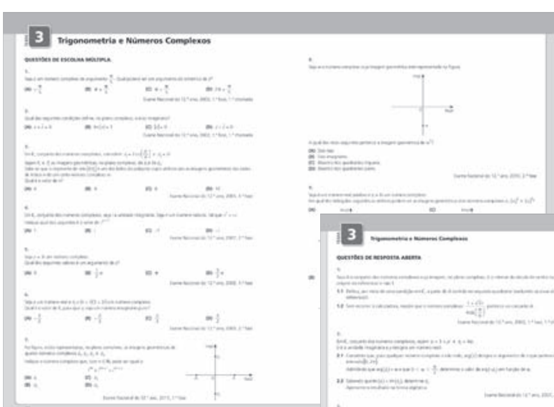
SANTILLANA
CONSTÂNCIA

Apresentação

Este caderno destina-se aos alunos que se estão a preparar para fazer o Exame Nacional de Matemática A de 12.º ano.

Está dividido em três partes, de acordo com os temas que compõem o programa da disciplina (Probabilidades e Combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e Trigonometria e Números Complexos), e apresenta um conjunto de questões retiradas dos exames nacionais já realizados.

Cada tema inclui questões de escolha múltipla, questões de resposta aberta e respetivas propostas de resolução, para que o aluno possa comprovar a sua evolução na aprendizagem.


3 Trigonometria e Números Complexos

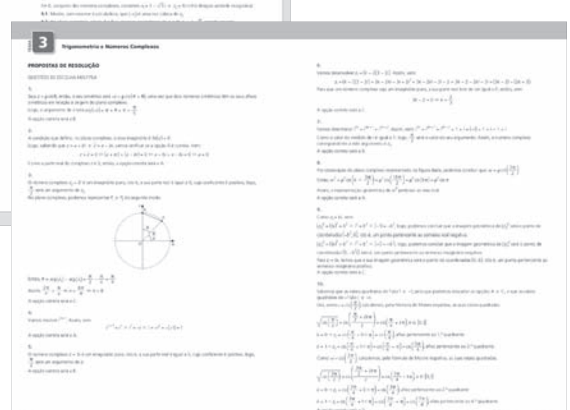
QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

QUESTÕES
DE ESCOLHA MÚLTIPLA


3 Trigonometria e Números Complexos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

QUESTÕES
DE RESPOSTA ABERTA


3 Trigonometria e Números Complexos

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO

Índice

TEMA 1

Probabilidades e Combinatória

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

As cinco letras da palavra TIMOR foram pintadas, cada uma em sua bola.
As cinco bolas, indistinguíveis ao tato, foram introduzidas num saco.
Extraem-se, aleatoriamente, as bolas do saco, sem reposição, e colocam-se em fila, da esquerda para a direita.
Qual é a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extração, estava formada a sucessão de letras TIM?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 1.ª fase

2.

Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
Considere os acontecimentos:

- A: «Sair face ímpar»;
- B: «Sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento contrário de $A \cup B$?

(A) Sair face 1 ou face 5.
(B) Sair face 4 ou face 6.
(C) Sair a face 2.
(D) Sair a face 5.

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 1.ª chamada

3.

De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

(A) 121
(B) 133
(C) 144
(D) 156

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 2.ª fase

4.

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	a	0,4

(a designa um número real)

Qual é o valor médio desta variável?

(A) 1,1
(B) 1,2
(C) 1,3
(D) 1,4

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

5.

Admita que a variável *altura*, em centímetros, dos rapazes de 13 anos de um certo país, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 140.
Escolhido, ao acaso, um rapaz de 13 anos desse país, sabe-se que a probabilidade de a sua altura pertencer a um determinado intervalo $[a, b]$ é igual a 60%.
Quais dos seguintes podem ser os valores de a e de b?

(A) $a = 140$ e $b = 170$
(B) $a = 120$ e $b = 140$
(C) $a = 130$ e $b = 150$
(D) $a = 150$ e $b = 180$

Teste Intermédio do 12.º ano, 2006

6.

A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31.
Qual é o quinto elemento da linha anterior?

(A) 23 751 **(B)** 28 416 **(C)** 31 465 **(D)** 36 534

Teste Intermédio do 12.º ano, 2008

7.

Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?

(A) 3560 **(B)** 3840 **(C)** 4180 **(D)** 4320

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

8.

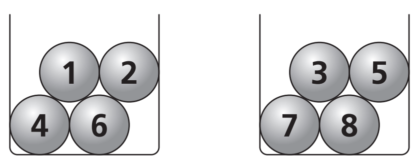
Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus). Em cada naipe há um *ás*, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do dois ao dez).
A Joana pretende fazer uma sequência com seis cartas do naipe de espadas. Ela quer iniciar a sequência com o ás, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.
Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?

(A) 416 **(B)** 432 **(C)** 528 **(D)** 562

Teste Intermédio do 12.º ano, 2005

9.

Considere duas caixas, A e B, cada uma delas contendo quatro bolas numeradas, tal como a figura abaixo ilustra.



Caixa A Caixa B

Extraem-se, ao acaso, duas bolas da caixa A e uma bola da caixa B.
Multiplicam-se os números das três bolas retiradas.
Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número par?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{2 \times 1}{{}^4C_2 \times {}^4C_1}$ **(D)** $\frac{{}^3C_2 \times {}^1C_1}{{}^4C_2 \times {}^4C_1}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2005, 2.ª fase

10.

Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor.
Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons.
Considere que *X* designa a variável «número de bombons com licor existentes nessa amostra».
Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável *X*?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

(D)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 1.ª chamada

11.

A estatística revela que o basquetebolista Zé Mão Quente falha 10% dos lances livres que executa.
Num treino, o Zé Mão Quente vai executar uma série de oito lances livres.
Indique qual dos acontecimentos seguintes tem a probabilidade igual a:

$$1 - 0{,}9^8 - {}^8C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$$

(A) O Zé Mão Quente concretiza pelo menos seis lances livres.
(B) O Zé Mão Quente concretiza pelo menos sete lances livres.
(C) O Zé Mão Quente concretiza no máximo seis lances livres.
(D) O Zé Mão Quente concretiza no máximo sete lances livres.

Teste Intermédio do 12.º ano, 2009

12.

Dois cientistas, que vão participar num congresso no estrangeiro, mandam reservar hotel na mesma cidade, cada um sem conhecimento da marcação feita pelo outro.
Sabendo que nessa cidade existem sete hotéis, todos com igual probabilidade de serem escolhidos, qual é a probabilidade de os dois cientistas ficarem no mesmo hotel?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{5}{7}$ **(D)** $\frac{6}{7}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 2.ª fase

13.

Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol.
Sabe-se que:

- metade dos alunos da turma pratica andebol;
- 70% dos alunos da turma pratica basquetebol.

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de andebol.
Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

(A) 0,1 **(B)** 0,2 **(C)** 0,3 **(D)** 0,4

Teste Intermédio do 12.º ano, 2006

14.

O código de um autorrádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137.
Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7?

(A) 486 **(B)** 810 **(C)** 432 **(D)** 600

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

15.

Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento.
De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se quiser começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 24 **(D)** 120

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 1.ª fase

16.

Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?

(A) $\frac{19}{{}^{35}C_2}$ **(B)** $\frac{35}{{}^{36}C_2}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{35}C_2}$ **(D)** $\frac{18}{{}^{36}C_2}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 2.ª fase

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A, B, AB e O.
Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o fator Rhesus.
Se o sangue de uma pessoa possui este fator, diz-se Rhesus positivo (Rh^+); se não possui este fator, diz-se Rhesus negativo (Rh^-).
Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respetivos Rhesus estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh^+	40,0%	6,9%	2,9%	35,4%
Rh^-	6,5%	1,2%	0,4%	6,7%

1.1 Escolhido um português ao acaso, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo **não** ser o O? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

1.2 Escolhido um português ao acaso, e sabendo que é Rhesus negativo, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser o A? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 1.ª fase, 2.ª chamada

2.

De um baralho de cartas, selecionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes).
Dividiram-se as 16 cartas em dois grupos: um com os ases e os reis, e outro com as damas e os valetes.
Retiraram-se, ao acaso, duas cartas de cada grupo (sem reposição).
Qual é a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 2.ª fase

3.

Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

3.1 Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

3.1.1 Determine a probabilidade de o número escolhido ter exatamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.1.2 Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

3.2 Considere o seguinte problema:
«De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:

- começam por 9;
- têm os algarismos todos diferentes;
- a soma dos quatro algarismos é par.

Quantos são esses números?»
Uma resposta correta a este problema é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$.
Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique porquê.

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 2.ª chamada

4.

Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

4.1 Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco para pagar o seu bilhete é igual a 0,6.
Determine a probabilidade de exatamente seis desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagar o seu bilhete.
Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

4.2 A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo, e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.
Determine a probabilidade de um passageiro que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo.
Apresente o resultado na forma de dízima.

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

5.

5.1 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \;\text{ e }\; B \subset \Omega)$ de probabilidade não nula.
Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ designam probabilidades condicionadas.
Mostre que:

$$P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

5.2 Relativamente a uma turma do 12.º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

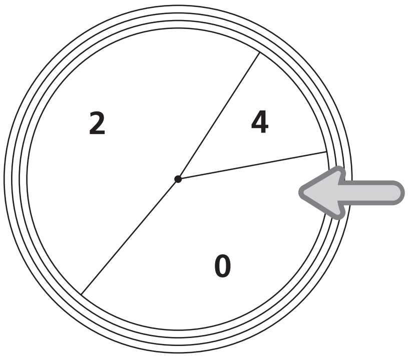
Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B, no contexto do problema. Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

Teste Intermédio do 12.º ano, 2008

6.

Um dos jogos mais populares da feira anual de Vila Nova de Malmequeres é a Roda da Fortuna.
Neste jogo, cada jogada consiste em girar aleatoriamente uma roda que está dividida em três setores circulares com áreas diferentes e numerados de acordo com o esquema da figura.
Para jogar, uma pessoa tem previamente de se inscrever, de indicar o número de jogadas que pretende realizar e de efetuar o respetivo pagamento.
Sempre que a roda é posta a girar, quando esta para, o ponteiro indica um setor. O prémio a receber em cada jogada corresponde ao valor, em euros, registado no setor indicado pelo ponteiro, no instante em que a roda para.



6.1 Seja X a variável aleatória «número registado no setor indicado pelo ponteiro no instante em que a roda para, numa jogada».
A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	$3a$	0,48	a

onde a representa um número real.
Mostre que: $a = 0{,}13$

6.2 Na Roda da Fortuna, um jogador terá lucro apenas se o valor total que receber em prémios nas jogadas que realizar for superior ao valor total pago pela inscrição efetuada.
O Ivo inscreveu-se para realizar duas jogadas e pagou 4 euros por essa inscrição.
Mostre que a probabilidade de o Ivo obter lucro com a realização das duas jogadas é 0,1417.

Exame Nacional de Matemática B, 2011, 1.ª fase

7.

7.1 Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A \subset S \text{ e } B \subset S)$.
Prove que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respetivamente, e $P(A|B)$ designa a probabilidade de A, se B).

7.2 Das raparigas que moram em Vale do Rei, sabe-se que:

- a quarta parte tem olhos verdes;
- a terça parte tem cabelo louro;
- das que têm cabelo louro, metade tem olhos verdes.

7.2.1 Escolhendo aleatoriamente uma rapariga de Vale do Rei, qual é a probabilidade de ela não ser loura nem ter olhos verdes?
Sugestão: se lhe for útil, pode utilizar a igualdade enunciada na alínea anterior para resolver o problema.

7.2.2 Admita agora que em Vale do Rei moram cento e vinte raparigas. Pretende-se formar uma comissão de cinco raparigas para organizar um baile. Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas raparigas louras?

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 1.ª chamada

8.

No balcão de uma geladaria existe um recipiente com dez compartimentos, cinco à frente e cinco atrás, para colocar gelado. Em cada compartimento é colocado só um sabor, e nunca existem dois compartimentos com o mesmo sabor. Num certo dia, a geladaria tem sete sabores disponíveis: cinco são de fruta (morango, ananás, pêssego, manga e framboesa) e os outros dois são baunilha e chocolate.

8.1 De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente?

8.2 De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente, de tal forma que os cinco de fruta preencham a fila da frente?

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 1.ª fase, 1.ª chamada

9.

Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

9.1 Considere que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

1.º Ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2.
2.º Em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:

- A: «As três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;
- B: «As duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fração irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efetuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

9.2 Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais n bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e n bolas amarelas.
Considere a seguinte experiência:
«Ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.»
Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e de a outra ser verde é $\frac{5}{39}$, determine o valor de n.

Teste Intermédio do 12.º ano, 2005 (adaptado)

10.

O Auto-Hexágono é um *stand* de venda de automóveis.

10.1 Efetuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste *stand*, o qual revelou que:

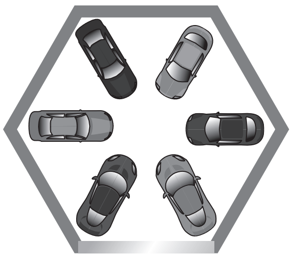
- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

10.1.1 A Marina, empregada do *stand*, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

10.1.2 Alguém informou depois a Marina de que o referido automóvel vinha equipado com alarme.
Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

10.2 Este *stand*, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).
Pretende-se arrumar seis automóveis diferentes (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique voltado para um vértice do hexágono.
Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem voltados para os vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.


Montra

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, Prova modelo

11.

Uma turma de 12.º ano é constituída por raparigas, umas de 16 anos e as restantes de 17 anos, e por rapazes, uns de 17 anos e os restantes de 18 anos.
Os alunos dessa turma estão numerados consecutivamente, a partir do número 1.
Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e regista-se o número, a idade e o sexo desse aluno.
Em cada uma das opções seguintes estão indicados dois acontecimentos, X e Y, associados a esta experiência aleatória.

Opção 1: X: «O aluno escolhido tem idade superior ou igual a 17 anos»;
Y: «O aluno escolhido tem 16 ou 17 anos».
Opção 2: X: «O número do aluno escolhido é par»;
Y: «O número do aluno escolhido é múltiplo de 4».
Opção 3: X: «O aluno escolhido tem 18 anos»;
Y: «O aluno escolhido é rapariga».
Opção 4: X: «O aluno escolhido é rapaz»;
Y: «O aluno escolhido tem 17 anos».

Em apenas uma das opções acima apresentadas os acontecimentos X e Y são tais, que são verdadeiras as três afirmações seguintes:

$$P(X \cup Y) > P(X), \quad P(X \cup Y) < 1 \quad \text{e} \quad P(X \cap Y) > 0$$

Qual é essa opção? Numa pequena composição, explique por que razão rejeita as outras três opções (para cada uma delas, indique, justificando, qual é a afirmação falsa).

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

12.

Considere um prisma regular em que cada base tem n lados.

Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por:

$$2\left({}^{n}C_2 - n\right) + 2n$$

Exame Nacional 12.º ano, 2005, 1.ª fase

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

Como no final da terceira extração estava formada a sucessão de letras TIM, isso significa que ficaram no saco as bolas com as letras *O* e *R*. Então, nas duas extrações que faltam existem apenas duas possibilidades: *OR* e *RO*. Como apenas *OR* leva à formação correta da palavra TIMOR, a probabilidade será de $\frac{1}{2}$, pelo que a opção correta será a C.

2.

O acontecimento *A* definido em extensão será $A = \{1, 3, 5\}$; o acontecimento *B* será $B = \{4, 5, 6\}$.
Então, $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
Logo, o acontecimento contrário será $\overline{A \cup B} = \{2\}$, pelo que a opção correta será a C.

3.

Para se sentarem as quatro raparigas e os três rapazes podemos começar por distribuí-los por cada um dos lugares que vão ocupar, sabendo que se sentarão alternadamente. Façamos um esquema para auxiliar na resolução:

♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
4	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**	**1**

No primeiro lugar podem sentar-se as quatro raparigas indistintamente, a seguir podem sentar-se três rapazes, depois três raparigas (uma vez que uma já ocupou o seu lugar), depois dois rapazes (um já ocupou o seu lugar), a seguir duas raparigas (duas estão já sentadas), depois um rapaz (o que falta sentar-se) e, finalmente, a última rapariga. Assim, vem:

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144$$

A opção correta será a C.

4.

Como $a + a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow a = 0{,}3$, calculamos a média da variável aleatória *X*:

$$\overline{x} = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 = 1{,}1$$

A opção correta será a A.

5.

Como a soma dos dois últimos elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos dois primeiros elementos dessa mesma linha, e como é referido que a soma dos dois primeiros elementos é igual a 31, então, concluímos que o segundo elemento é 30, pelo que a linha considerada contém os elementos da forma geral ${}^{30}C_k$.
O quinto elemento da linha anterior será:

$${}^{29}C_4 = 23\,751$$

A opção correta será a A.

6.

A curva de Gauss apresenta simetria em relação ao valor médio; logo, a probabilidade de se escolher um rapaz ao acaso e de a sua altura pertencer ao intervalo $]-\infty, 140]$ é de 50%, verificando-se o mesmo para o intervalo $[140, +\infty[$.

Analisando cada uma das opções, verificamos que as opções A, C e D levam a um intervalo que está contido num dos intervalos referidos atrás, pelo que a probabilidade será menor do que 50%.

A opção correta será a C.

7.

O número de maneiras que existe de, entre o grupo dos quatro rapazes, se escolherem dois que ficam de pé será ${}^4C_2$.
O número total de maneiras de ordenar o grupo de seis rapazes e raparigas será 6!. Então, o número pedido será:

$${}^4C_2 \times 6! = 4320$$

A opção correta será a D.

8.

Como a Joana pretende iniciar a sequência com um ás, seguindo-se três figuras e finalizando com duas das nove cartas restantes do mesmo naipe, então o número de sequências diferentes que se podem fazer com as condições pedidas será:

$$1 \times 3! \times {}^{9}A_2 = 1 \times 6 \times 72 = 432$$

A opção correta será a B.

9.

Ao retirarmos duas bolas da caixa A, verificamos que o produto dos seus números é sempre um número par. Quando se multiplica este valor por um número de qualquer das bolas da caixa B, verificamos que o produto final é sempre par.
A opção correta será a B.

10.

Sabemos que, dos cinco bombons, dois têm licor e três não têm licor. Ao retirarmos uma amostra de três bombons podemos formular três hipóteses:

1.ª hipótese: Retirar todos os bombons sem licor.

$$P(X = 0) = \frac{{}^{2}C_0 \times {}^{3}C_3}{{}^{5}C_3} = \frac{1}{{}^{5}C_3}$$

2.ª hipótese: Retirar apenas um bombom com licor.

$$P(X = 1) = \frac{{}^{2}C_1 \times {}^{3}C_2}{{}^{5}C_3} = \frac{2 \times 3}{{}^{5}C_3} = \frac{6}{{}^{5}C_3}$$

3.ª hipótese: Retirar dois bombons com licor.

$$P(X = 2) = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{3}C_1}{{}^{5}C_3} = \frac{1 \times 3}{{}^{5}C_3} = \frac{3}{{}^{5}C_3}$$

A opção correta será a A.

11.

A probabilidade que o Zé Mão Quente tem de concretizar um lance livre é de 0,9, uma vez que falha 10% dos lances livres que executa.
Assim, ao executar uma série de oito lances livres, temos que a probabilidade de o Zé Mão Quente concretizar os oito lances livres é $0{,}9^8$, e a probabilidade de se concretizarem sete lances livres é:

$${}^{8}C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$$

Então, $0{,}9^8 + {}^{8}C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$ é a probabilidade de o Zé Mão Quente concretizar sete ou oito lances livres, pelo que a probabilidade do acontecimento contrário deste será:

$$1 - \left(0{,}9^8 + {}^{8}C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1\right) = 1 - 0{,}9^8 - {}^{8}C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$$

Isto é, esta é a probabilidade do acontecimento «o Zé Mão Quente concretiza no máximo seis lances livres».
A opção correta será a C.

12.

O número de casos possíveis será 7×7, pois o primeiro cientista tem exatamente sete hotéis para escolher, assim como também o segundo cientista.
O número de casos favoráveis será 7, que é o número de hotéis que podem ser escolhidos.
Logo, a probabilidade pedida será:

$$P = \frac{7}{7 \times 7} = \frac{1}{7}$$

A opção correta será a A.

13.

Consideremos os acontecimentos A: «o aluno pratica andebol» e B: «o aluno pratica basquetebol». Então, temos de determinar:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Sabemos também que, como a totalidade dos alunos da turma pratica pelo menos um dos desportos, vem:

$$P(A\cup B)=1$$

Logo:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 1=0{,}5+0{,}7-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=1{,}2-1\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$$

Então:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(B|A)=\frac{0{,}2}{0{,}5}\Leftrightarrow P(B|A)=0{,}4$$

A opção correta será a D.

14.

Segundo o enunciado, podem existir apenas dois algarismos iguais a 7; logo, há ${}^4C_2$ maneiras diferentes de se colocarem os dois algarismos 7 nos quatro espaços.
Restam nove algarismos (que são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9) para «preencher» os dois lugares restantes, e esses algarismos podem repetir-se. Assim, há 9×9 hipóteses de colocar os nove algarismos restantes nos dois lugares a ocupar.
Logo, o número de códigos diferente será:

$${}^4C_2\times 9\times 9=486$$

A opção correta será a A.

15.

Como a visita se inicia na Torre Vasco da Gama e termina no Oceanário, obrigatoriamente, então, resta a sequência de três elementos, que são os locais que ainda falta visitar.
Logo, vem:

$$3!=6$$

A opção correta será a A.

16.

Como o segundo elemento da linha do Triângulo de Pascal é 35, então, essa linha tem 36 elementos, sendo os elementos equidistantes iguais dois a dois. Logo, podemos concluir que se podem formar 18 pares de elementos iguais.
Assim, a probabilidade pedida será:

$$P=\frac{18}{{}^{36}C_2}$$

A opção correta será a D.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1 Consideremos o acontecimento O: «o sangue é do tipo O». Então:

$$P(\overline{O}) = 100 - P(O) = 100 - (35{,}4 + 6{,}7) = 100 - 42{,}1 = 57{,}9 \approx 58$$

A probabilidade de o grupo sanguíneo não ser o O é aproximadamente de 58%.

1.2 Consideremos os acontecimentos A: «o sangue é do tipo A» e R: «O sangue tem fator Rhesus negativo».
Calculemos a probabilidade condicionada $P(A|R)$:

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{6{,}5}{6{,}5 + 1{,}2 + 0{,}4 + 6{,}7} = \frac{6{,}5}{14{,}8} = 43{,}91 \approx 44$$

A probabilidade de o grupo sanguíneo ser o A, sabendo que possui o fator Rhesus negativo, é aproximadamente de 44%.

2.

Calculemos o número de casos possíveis:
Temos ${}^8C_2$ maneiras diferentes de escolher duas cartas do conjunto de ases e de reis, e ${}^8C_2$ maneiras diferentes de escolher duas cartas do conjunto de damas e valetes.
Portanto, o número de casos possíveis será: ${}^8C_2 \times {}^8C_2 = 28 \times 28 = 784$

Calculemos o número de casos favoráveis:
Temos ${}^4C_1$ maneiras diferentes de escolher um valete, ${}^4C_1$ maneiras diferentes de escolher uma dama, ${}^4C_1$ maneiras diferentes de escolher um rei e ${}^4C_1$ maneiras diferentes de escolher um ás.
Logo, o número de casos favoráveis será: ${}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
Assim, a probabilidade de obter um conjunto formado pelas cartas referidas será:

$$P = \frac{256}{784} = \frac{16}{49}$$

3.

3.1

3.1.1 Calculemos o número de casos possíveis:
Pretendemos o número de maneiras diferentes de escolher quatro algarismos, diferentes ou não, de entre nove algarismos, isto é, ${}^9A'_4 = 9^4 = 6561$

Calculemos o número de casos favoráveis:
Há ${}^4C_2$ modos diferentes de escolher dois lugares em quatro para os algarismos iguais a 1, não importando a ordem, uma vez que são iguais, e há ${}^8A'_2$ modos diferentes de escolher os restantes dois algarismos, diferentes ou não, de entre os oito algarismos que restam.
Logo, o número de casos favoráveis será:

$${}^4C_2 \times {}^8A'_2 = 6 \times 8^2 = 384$$

A probabilidade pedida será:

$$P = \frac{384}{6561} \approx 0{,}06 = 6\%$$

3.1.2 O número de casos possíveis nesta situação é o mesmo que anteriormente:

$${}^9A'_4 = 9^4 = 6561$$

O número de casos favoráveis será o seguinte: o algarismo que ocupa a ordem dos milhares será obrigatoriamente o 9, e o que ocupa a ordem das centenas será obrigatoriamente o 8. Como os dois algarismos que restam são escolhidos de entre os restantes sete, podemos fazê-lo de ${}^7A_2 = 42$ maneiras diferentes.
Logo, a probabilidade pedida será:

$$P = \frac{42}{6561} \approx 0{,}006$$

3.2 Os números que se têm de formar são do tipo 9_ _ _; logo, os algarismos que faltam terão de ser obrigatoriamente diferentes e escolhidos de entre os algarismos de 1 a 8. Para que a soma dos quatro algarismos que formam o número seja par, é necessário que a soma dos algarismos que faltam seja ímpar, verificando-se dois casos:

1.º caso: os três algarismos serão ímpares. Neste caso, a escolha destes algarismos será feita entre os quatro algarismos 1, 3, 5 e 7, por ordem, existindo $^4A_3$ maneiras diferentes de se fazer.
2.º caso: um dos algarismos é ímpar e os restantes dois algarismos são pares. Neste caso, a colocação dos algarismos ímpares pode ser feita de três maneiras diferentes, e, para cada uma destas, o algarismo ímpar pode ser escolhido de entre quatro hipóteses possíveis — 1, 3, 5 e 7.
Os restantes dois algarismos, pares, serão escolhidos, por ordem, de entre quatro algarismos — 2, 4, 6 e 8 — o que se pode fazer de $^4A_2$ maneiras diferentes.
Assim, neste segundo caso, há $3 \times 4 \times {}^4A_2$ maneiras diferentes de formar os números pedidos.
Logo, $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$ é uma resposta correta a este problema.

4.

4.1 Consideremos X como a variável aleatória que corresponde ao número de jovens que pagam com multibanco. Logo, utilizando a distribuição binomial de probabilidades, temos:

$$P(X = 6) = {}^9C_6 \times (0{,}6)^6 \times (0{,}4)^3 \approx 0{,}25$$

Então, a probabilidade de exatamente seis jovens utilizarem cartão multibanco para pagar o seu bilhete será 0,25.

4.2 Consideremos os acontecimentos:

- A: «O passageiro segue viagem»;
- B: «O destino da viagem é Berlim».

Sabe-se que $P(\overline{A}|B) = 0{,}05$, então, temos:

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}05 \times 0{,}3 = 0{,}015$$

e sabe-se também que:

$$P(A|\overline{B}) = 0{,}92$$

então, tem-se que:

$$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}92 \times 0{,}7 = 0{,}644$$

Podemos construir uma tabela para esquematizar todos os resultados:

	A	$\overline{A}$	
B	0,285	0,015	0,3
$\overline{B}$	0,644	0,056	0,7
	0,929	0,071	1

Então, vem:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071 = \frac{71}{1000}$$

5.

5.1 $P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A|B)\left[1 - P(\overline{B})\right] =$

$$= P(A|B) \times P(B) =$$

$$= P(A \cap B) =$$

$$= P(A) \times P(B|A)$$

c. q. d.

5.2 Consideremos os acontecimentos:

- A: «O aluno escolhido é rapariga»;
- B: «O aluno escolhido pratica desporto».

Sabe-se que 60% dos alunos da turma praticam desporto, então:

$$P(B) = 0{,}6$$

Sabe-se que 40% dos alunos da turma são raparigas, então:

$$P(A) = 0{,}4$$

Sabe-se que metade dos praticantes de desporto são raparigas, então:

$$P(A|B) = 0{,}5$$

Utilizando a fórmula da alínea anterior, temos:

$$0{,}5 - 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}4 \times P(B|A) \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}4} \Leftrightarrow P(B|A) = 0{,}75$$

Logo, a probabilidade pedida é 75%.

6.

6.1 Como a tabela define uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidades é 1. Assim, vem:

$$3a + 0{,}48 + a = 1 \Leftrightarrow 4a = 1 - 0{,}48 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}52}{4} \Leftrightarrow a = 0{,}13$$

c. q. d. (como queríamos demonstrar)

6.2 Como o Ivo se inscreveu para realizar duas jogadas e pagou 4 euros por essa inscrição, para obter lucro nessas duas jogadas terá de ganhar 6 ou 8 euros, o que corresponde à indicação do ponteiro das seguintes jogadas:

$$2 + 4,\ \ 4 + 2 \ \text{ ou } \ 4 + 4$$

Consideremos então os seguintes acontecimentos:

- A: «Sair 2 na primeira jogada»;
- B: «Sair 4 na primeira jogada»;
- C: «Sair 2 na segunda jogada»;
- D: «Sair 4 na segunda jogada».

Assim, a probabilidade de o Ivo obter lucro é dada por:

$$P = P(A \cap D) + P(B \cap C) + P(B \cap D) =$$
$$= 0{,}48 \times 0{,}13 + 0{,}13 \times 0{,}48 + 0{,}48 \times 0{,}48 = 0{,}0624 + 0{,}0624 + 0{,}0169 = 0{,}1417$$

7.

7.1 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] =$

$$= \left[1 - P(A)\right] - P(B) - P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

c. q. d.

7.2

7.2.1 Consideremos os acontecimentos:

- A: «Ter olhos verdes»;
- B: «Ter cabelo louro».

Temos, então:

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

Utilizando a igualdade demonstrada na alínea anterior, vem: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

7.2.2 Determinemos o número de raparigas com cabelo louro: $\frac{1}{3} \times 120 = 40$

Como cada comissão tem de ter exatamente duas raparigas louras, então, terá três raparigas não louras. Logo, o número de comissões diferentes que se podem formar será:

$$^{40}C_2 \times {}^{80}C_3 = 64\,084\,800$$

8.

8.1 Como existem dez compartimentos para colocar os gelados e se pretende ocupar apenas sete desses dez compartimentos, interessando a ordem pela qual são colocados, então, temos ${}^{10}A_7 = 604\,800$ maneiras diferentes de colocar os sete sabores no recipiente.

8.2 Existem 5! maneiras diferentes de colocar os cinco sabores de fruta nos cinco compartimentos na fila da frente. Por outro lado, existem ${}^{5}A_2$ maneiras diferentes de colocar os sabores de baunilha e de chocolate nos cinco compartimentos na fila detrás.
Logo, existem $5! \times {}^{5}A_2 = 2400$ maneiras diferentes de colocar os sete sabores no recipiente, ficando os cinco sabores de fruta na fila da frente.

9.

9.1 $P(B|A)$ significa a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor. Se as três bolas retiradas da caixa 1 e que são colocadas na caixa 2 são da mesma cor, então têm todas a cor verde, pois existem apenas na caixa 1 duas bolas pretas.
Depois da transferência das três bolas da caixa 1 para a caixa 2, esta fica com duas bolas pretas e quatro bolas verdes, totalizando seis bolas.
Ao serem retiradas duas bolas desta caixa, há, então, ${}^{6}C_2$ casos possíveis, sendo os casos favoráveis ao acontecimento «sair uma bola de cada cor» igual a 2×4.
Logo, a probabilidade pedida será, de acordo com a Regra de Laplace,

$$P = \frac{2 \times 4}{{}^{6}C_2} = \frac{8}{15}$$

9.2 Podemos equacionar o problema do seguinte modo:

$$\frac{n}{{}^{3+n}C_2} = \frac{5}{39}$$

Então, vem:

$$\frac{n}{{}^{3+n}C_2} = \frac{5}{39} \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{(3+n)(2+n)}{2}} = \frac{5}{39} \Leftrightarrow \frac{2n}{6+5n+n^2} = \frac{5}{39} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 78n = 30 + 25n + 5n^2 \Leftrightarrow 5n^2 - 53n + 30 = 0$$

Aplicando a fórmula resolvente, vem:

$$n = \frac{53 \pm \sqrt{53^2 - 4 \times 5 \times 30}}{2 \times 5} \Leftrightarrow n = \frac{53 \pm \sqrt{2209}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{53 \pm 47}{10} \Leftrightarrow n = 10 \vee n = 0{,}6$$

Como, no contexto do problema, n é um número natural, então, a solução pedida será $n = 10$.

10.

10.1

10.1.1 Consideremos os acontecimentos:

- A: «Comprar automóvel com alarme»;
- B: «Comprar automóvel com rádio».

Podemos construir uma tabela com os dados do problema, pelo que temos de calcular:

$P(A \cap B) = 0{,}15$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}20$

$P(A) = 0{,}45$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}45 - 0{,}15 = 0{,}30$

$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$

$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}50 - 0{,}15 = 0{,}35$

$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35 + 0{,}20 = 0{,}55$

Então, vem:

	A	**$\overline{A}$**	
B	15%	35%	50%
$\overline{B}$	30%	20%	50%
	45%	55%	100%

Verificamos que a probabilidade de a Marina acertar será:

$$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}35 = 35\%$$

10.1.2 Pretende-se determinar $P(B|A)$. Logo:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3}$$

10.2 O número de casos possíveis é o número de maneiras diferentes de se arrumarem os seis automóveis: 6!.
O número de casos favoráveis será $2! \times 4!$, pois 2! é o número de maneiras em que podemos dispor os dois automóveis desportivos, isto é, um pode ficar para o lado direito da montra, e o outro pode ficar para o lado esquerdo, e vice-versa, e 4! é o número de posições diferentes em que se podem colocar os restantes automóveis na montra.
Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{2! \times 4!}{6!} = \frac{2}{20} = \frac{1}{15}$$

11.

A opção 1 é rejeitada porque $P(X \cup Y) < 1$ é falsa, já que $P(X \cup Y) = 1$, uma vez que a reunião dos dois acontecimentos é o acontecimento certo.
A opção 2 é rejeitada porque $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa, uma vez que $Y \subset X$, logo:

$$P(X \cup Y) = P(X)$$

A opção 3 é rejeitada porque $P(X \cap Y) > 0$ é falsa, uma vez que os acontecimentos X e Y são acontecimentos incompatíveis; logo:

$$P(X \cap Y) = 0$$

Resta assim a opção 4, em que todas as afirmações são verdadeiras.

12.

Como o prisma tem n faces laterais, e tendo cada uma das faces duas diagonais, então, há um total de $2n$ diagonais das faces laterais.
Em cada uma das bases existem n vértices, dando origem a ${}^nC_2$ segmentos de reta. Destes segmentos de reta temos n lados do polígono; então, ${}^nC_2 - n$ será o número de diagonais de cada base.
Como o prisma tem duas bases, então $2\left({}^nC_2 - n\right)$ é o número de diagonais existentes nessas bases.
Podemos, então, concluir que, no total, há $2\left({}^nC_2 - n\right) + 2n$ diagonais nas faces do prisma.

TEMA 2

Introdução ao Cálculo Diferencial II

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade: $\log_p 16 = 4$

(A) $\sqrt{2}$

(B) 2

(C) 4

(D) – 4

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 2.ª fase

2.

Sabendo que $\ln(x) - \ln e^{\frac{1}{3}} > 0$ (ln designa logaritmo de base e), um valor possível para x é:

(A) 0

(B) –1

(C) 1

(D) 2

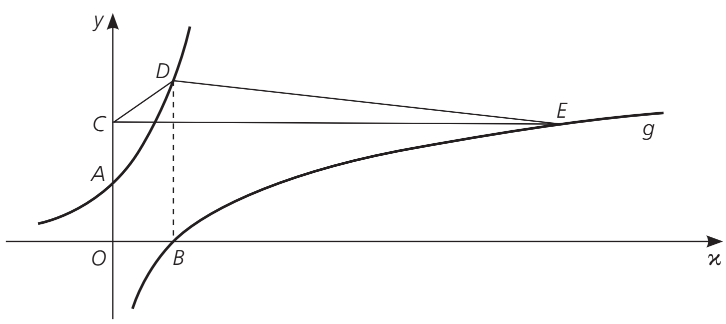
Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 1.ª fase

3.

Na figura seguinte, estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- parte do gráfico da função f, de domínio, $\mathbb{R}$ definida por: $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por: $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e).

O ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox.



Na figura, está também representado um triângulo $[CDE]$.
O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g.
Sabe-se ainda que:

- a reta BD é paralela ao eixo Oy e a reta CE é paralela ao eixo Ox;
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\dfrac{(e-1)\ln 2}{2}$

(B) $\dfrac{(e^2-1)\ln 2}{2}$

(C) $\dfrac{e(e-2)}{2}$

(D) $\dfrac{e^2(e-2)}{2}$

Teste Intermédio do 12.º ano, 2006

4.

De uma função f, contínua no intervalo $[1, 3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 3]$.
(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1, 3]$.
(C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 3]$.
(D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1, 3]$.

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 1.ª chamada

5.

Seja g uma função, de domínio A, definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$. Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A) $]-e + 1, e - 1[$

(B) $]-1, 1[$

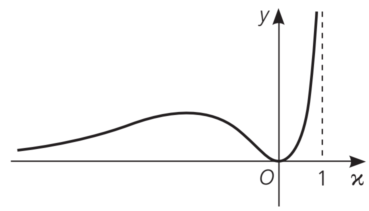
(C) $]0, +\infty[$

(D) $]-\infty, 1[$

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 2.ª fase

6.

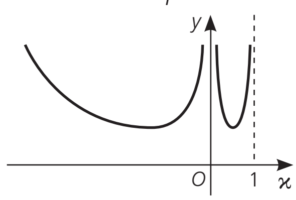
Na figura ao lado, está representada, em referencial xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-\infty, 1[$, contínua em todo o seu domínio.
Tal como a figura sugere, tem-se que:



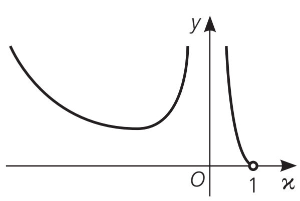
- o gráfico de f contém a origem do referencial;
- as retas de equações $y = 0$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de f.

Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy, parte do gráfico de $\frac{1}{f}$?

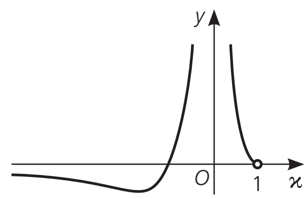
(A)



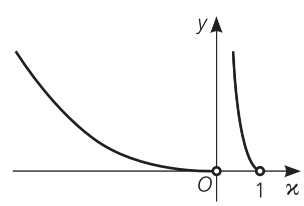
(B)



(C)



(D)



Teste Intermédio do 12.º ano, 2007

7.

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leqslant 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral: $u_n = \frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to -\infty} g(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

Exame Nacional do 12.º ano, 2010, 2.ª fase

8.

Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{5\}$, contínua em todo o seu domínio.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma reta.
Em qual das opções as duas retas assim definidas são as assíntotas do gráfico da função f?

(A) $y = x$ e $y = 2$

(B) $y = 2$ e $x = 5$

(C) $y = x$ e $y = 5$

(D) $y = -3$ e $y = 2$

Exame Nacional do 12.º ano, 2005, 1.ª fase

9.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

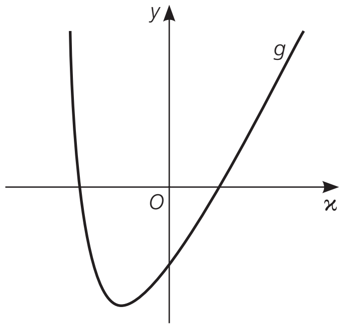
Relativamente à continuidade da função h, no ponto O, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua.
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita.
(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda.
(D) É descontínua à esquerda e à direita.

Exame Nacional 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 2.ª chamada

10.

Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $]-3, +\infty[$.



A reta de equação $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x - 4\right) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{g(x)} = 2$

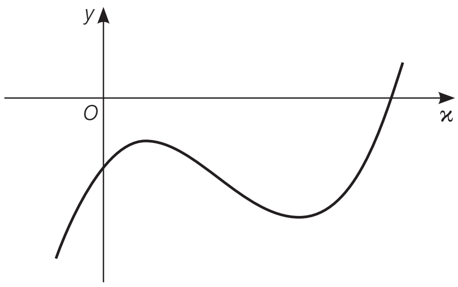
(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x + 4\right) = 0$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x\right) = 0$

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

11.

Na figura seguinte, está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respetivamente.
Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.
Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$

(B) $h(0) - h'(0)$

(C) $h'(0) - h''(0)$

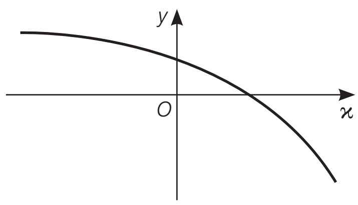
(D) $h'(0) \times h''(0)$

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

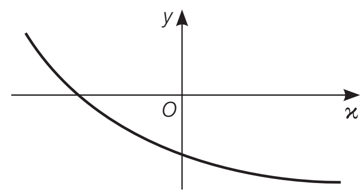
12.

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas em $\mathbb{R}$.
Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?

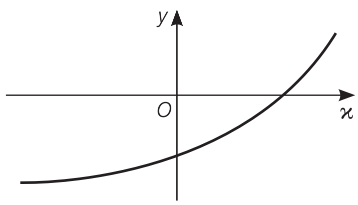
(A)



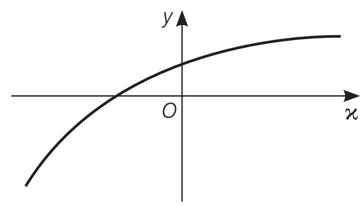
(C)



(B)



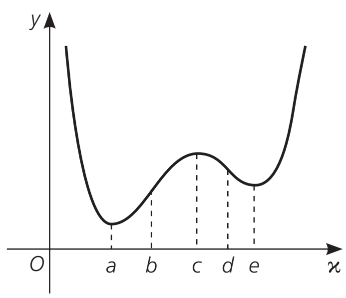
(D)



Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 1.ª fase, 1.ª chamada

13.

Na figura seguinte, está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Numa das opções seguintes estão os quadros de sinais de f' e de f'', respetivamente, primeira e segunda derivadas de f. Identifique-as.

(A)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(C)

x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(B)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

(D)

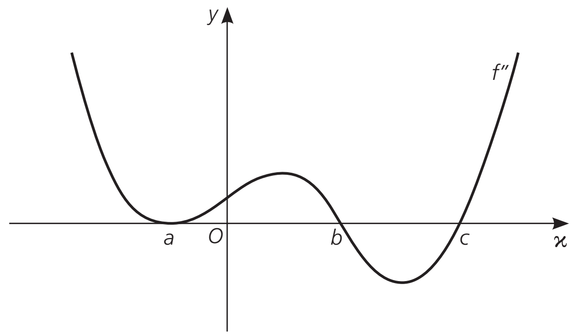
x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 1.ª chamada

14.

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Na figura está representada parte do gráfico de f'', segunda derivada da função f.

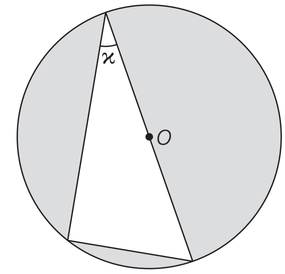


Relativamente ao gráfico da função f, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
(B) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0, b]$.
(D) A concavidade está sempre voltada para cima.

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 2.ª fase

15.



Na figura, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.
Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?

(A) $\pi - \text{sen}(2x)$

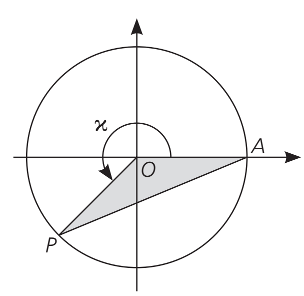
(B) $\frac{\pi}{2} - \text{sen}(2x)$

(C) $\pi - 2\,\text{sen}(2x)$

(D) $\pi - \frac{\text{sen}(2x)}{4}$

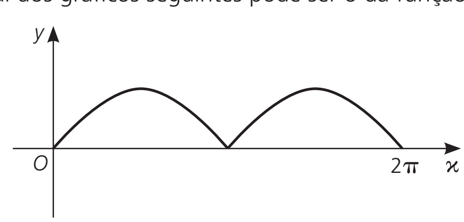
Exame Nacional do 12.º ano, 2009, 1.ª fase

16.

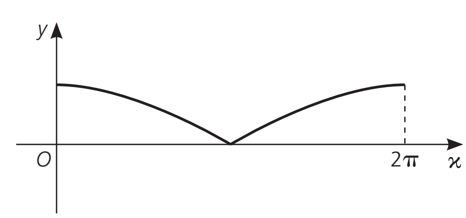


Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.
Considere que um ponto P parte de $A(1, 0)$ e se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semirreta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$ $(x \in [0, 2\pi])$.
Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelos segmentos de reta $[OP]$, $[PA]$ e $[AO]$).
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g?

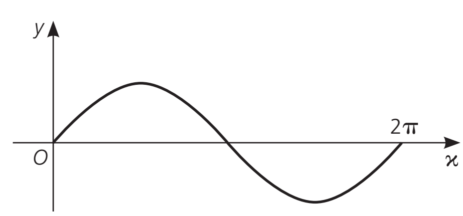
(A)



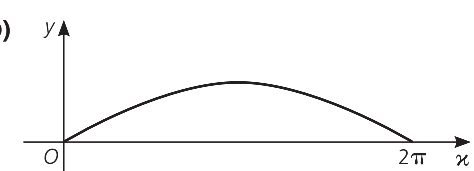
(C)



(B)



(D)

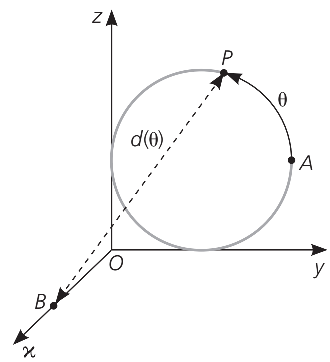


Exame Nacional do 12.º ano, 2005, 2.ª fase

17.

Na figura, estão representados, em referencial o. n. $O\varkappa yz$:

- uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz;
- o ponto $A(0, 2, 1)$;
- o ponto B, pertencente ao semieixo positivo $O\varkappa$.

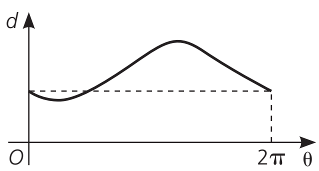


Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

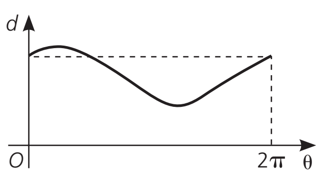
Para cada posição do ponto P, seja θ a amplitude, em radianos, do arco $AP\left(\theta \in [0, 2\pi]\right)$ e seja $d(\theta)$ a distância de P ao ponto B.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?

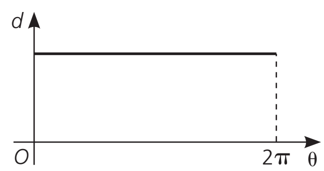
(A)



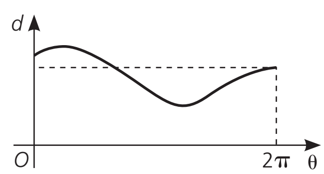
(B)



(C)



(D)



Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 2.ª fase

18.

O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objeto, por:

$$A(d) = \frac{5}{5 - d}$$

Indique a que distância do objeto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) 2 dm

(B) 4 dm

(C) 6 dm

(D) 8 dm

Exame Nacional do 12.º ano, 2000

19.

Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retângulo, com 7 m de comprimento, 5 m de largura e 4 m de altura.

Admita que o tanque está vazio.

Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de 2 m^3 por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a altura, em metros, da água do tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2t, \quad t \in [0,70]$

(B) $h(t) = 4 - 2t, \quad t \in [0,140]$

(C) $h(t) = \frac{2t}{35}, \quad t \in [0,70]$

(D) $h(t) = \frac{2t}{35}, \quad t \in [0,140]$

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 1.ª chamada

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação:

$$\log_3(7x + 6) \geqslant 2 + \log_3(x)$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Teste Intermédio do 12.º ano, 2011

2.

O nível N de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade:

$$N = 10\log_{10}\left(10^{12} I\right), \text{ para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1 Verifique que: $N = 120 + 10\log_{10} I$

2.2 Admita que o nível de ruído de um avião a jato, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.
Determine a intensidade desse som, em watts por metro quadrado.

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 2.ª chamada

3.

Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01t}}$$

Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

3.1 Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.
Interprete os valores obtidos no contexto do problema.

3.2 Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

Exame Nacional do 12.º ano, 2008, 1.ª fase

4.

Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por:

$$A(p) = -0,52 + 0,55\ln(p)$$

(ln designa logaritmo de base e)

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efetuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

4.1 O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2 Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante.
Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 2.ª chamada

5.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por: $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

5.1 Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

5.2 Resolva a equação $\ln[f(x)]=x$ (ln designa logaritmo de base e)

5.3 Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais do seu gráfico.

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 2.ª chamada

6.

Seja f a função de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geqslant 0 \\ \dfrac{3\operatorname{sen}(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

Exame Nacional do 12.º ano, 2008, 1.ª fase

7.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por: $f(x)=1-\ln(x^2)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

7.1 Determine os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

7.2 Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 2.ª fase

8.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-x+e^{2x^3-1}$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

8.1 Mostre que $f(x)=1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$.
Se utilizar a calculadora para eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

8.2 Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=0$.

Exame Nacional do 12.º ano, 2010, 2.ª fase

9.

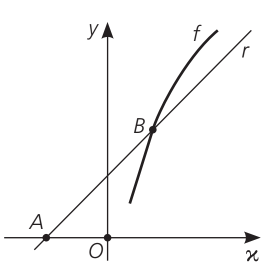
Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x-\cos x$.

9.1 Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0,\pi[$.

9.2 Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$ e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

9.3 Na figura seguinte, estão representadas:

- parte do gráfico da função f;
- parte de uma reta r, cuja inclinação é 45°, que contém o ponto $A(-3,0)$ e que interseta o gráfico da função f no ponto B.



Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 2.ª fase

10.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = 1 + 3x^2 e^{-x}$

10.1 Sem recorrer à calculadora, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

10.2 Sem recorrer à calculadora (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), mostre que no intervalo $]-1, 0[$, existe pelo menos um objeto cuja imagem, por meio de f, é 4.

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 1.ª fase

11.

Considere a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por: $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

11.1 Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule: $f'(0)$

11.2 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

11.3 Determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que: $f(x) = x + \cos x$

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 2.ª fase

12.

De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é dada por:

$$f'(x) = (x + 1)e^{x} - 10x$$

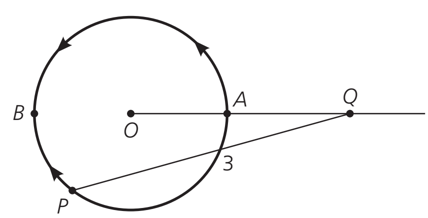
Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A, arredondada às décimas.
Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 1.ª fase, 2.ª chamada

13.

Na figura, estão representados:

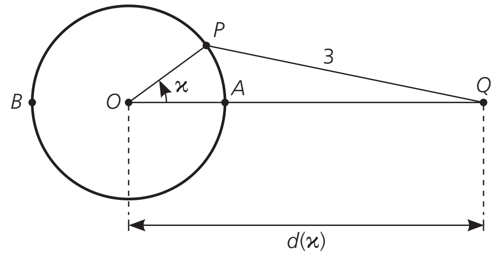
- uma circunferência de centro O e raio 1;
- dois pontos, A e B, sobre a circunferência, tais que $[AB]$; é um diâmetro;
- uma semirreta $\dot{O}A$;
- um segmento de reta $[PQ]$.



Considere que:

- o ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura acima;
- o ponto Q se desloca sobre a semirreta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto P, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semirreta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ (ver figura ao lado).



Seja d a função que, a cada valor de x pertencente a $[0, 2\pi]$, associa a distância, $d(x)$, do ponto Q ao ponto O.

13.1 Considere as afirmações seguintes sobre a função d e sobre a sua derivada, d' (a função d tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2d(\pi)$

II. $\forall x \in [0, 2\pi], \; d'(x) < 0$

Elabore uma pequena composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Nota: Neste item, não defina analiticamente a função d; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de x, tem-se que $d(x)$ é a distância do ponto Q ao ponto O).

13.2 Defina analiticamente a função d no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de $d(x)$, para cada x pertencente a este intervalo).

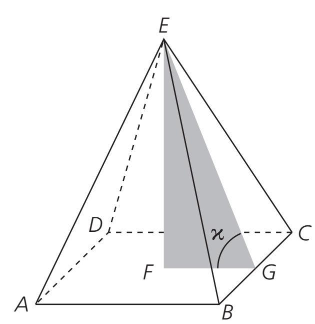
Sugestão: Trace a altura do triângulo $[OPQ]$ relativa ao vértice P, designe por R o ponto de interseção desta altura com a semirreta $\dot{O}A$, e tenha em conta que: $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$

Teste Intermédio do 12.º ano, 2009

14.

Na figura, está representada uma pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que:

- a base da pirâmide tem centro F e lado 2;
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$;
- x designa a amplitude do ângulo FGE.



14.1 Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por:

$$A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

14.2 Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 1.ª chamada

15.

Um paraquedista salta de um avião. Ao fim de cinco segundos, o paraquedas abre-se. Um minuto depois de ter saltado, o paraquedista atinge o solo.
Admita que a velocidade do paraquedista, medida em metros por segundo, t segundos após ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de k, por:

$$v(t) = \begin{cases} 55\left(1 - e^{kt}\right) & \text{se } t < 5 \\ 6 + 27e^{-1{,}7(t-5)} & \text{se } t \geqslant 5 \end{cases}$$

15.1 Sabendo que a função v é contínua, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às milésimas).

15.2 Estude a função quanto à monotonia, para $t \geqslant 5$. Interprete a conclusão a que chegou.

15.3 Comente a seguinte afirmação: «Após a abertura do paraquedas, a velocidade tem uma variação acentuada nos primeiros quatro segundos, após os quais estabiliza, permanecendo praticamente constante até à chegada ao solo.»

Exame Nacional do 12.º ano, 1999, Militares

16.

Seja $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que:

$$f(0) = f(2) = 0 \;\text{ e }\; f(1) > 0$$

Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que:

$$f(c) = f(c+1)$$

Sugestão: Considere a função $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = f(x) - f(x+1)$$

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

Pela definição de logaritmo, vem:

$$\log_p 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 4^p \Leftrightarrow 4^2 = 4^p \Leftrightarrow p = 2$$

Logo, a opção correta será a B.

2.

$$\ln(x) - \ln e^{\frac{1}{3}} > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

Das opções apresentadas, a única que verifica a condição: $x > \sqrt[3]{e}$ é $2 > \sqrt[3]{e}$

Logo, a opção correta é a D.

3.

Como a abcissa do ponto A é 0, a sua ordenada será $f(0) = e^0 = 1$, logo, a ordenada do ponto C será igual a 2 (porque $\overline{AC} = \overline{OA}$). Então, a abcissa do ponto E será:

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Como a abcissa do ponto B é igual a $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$, logo, a abcissa do ponto D é também 1 e a sua ordenada será $f(1) = e^1 = e$.

Então, a base $[CE]$ do triângulo $[CDE]$ mede e^2 e a altura será $e - 2$. Assim, a área do triângulo $[CDE]$ será: $\dfrac{e^2(e-2)}{2}$

A opção correta é a D.

4.

Sabendo que a função f é contínua no intervalo $[1, 3]$ e como $f(1) = 7$, $f(3) = 4$ e $5 \in [4, 7]$, então, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]1, 3[: f(c) = 5$

Logo, a opção correta é a C.

5.

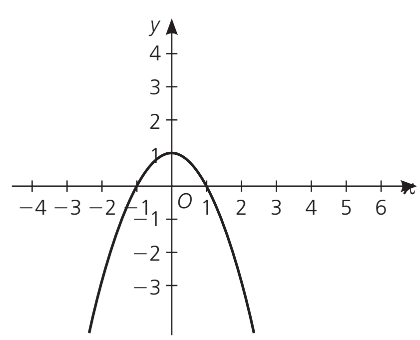
Determinemos o domínio da função g:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 > 0\}$$

$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Logo, $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[= A$

A opção correta é a B.



6.

Temos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty;\ \lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty;\ \text{e}\ \lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, a opção correta é a B.

7.

Determinemos:

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right) = 0^+$$

Então,

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln 0 = +\infty^+$$

Logo, a opção correta é a D.

8.

Como a função f é contínua, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ e $\lim\limits_{n \to 5} f(x) = -3$, podemos concluir que o gráfico da função f não admite assíntotas verticais.
Por outro lado, como $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 2$, então, a recta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f e como $\lim\limits_{n \to +\infty} [f(x) - x] = 0$, então, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.
Logo, as assíntotas do gráfico da função f são: $y = x$ e $y = 2$
A opção correta é a A.

9.

Verifica-se se: $\lim\limits_{n \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{n \to 0^+} h(x) = h(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 + e^x) = \lim_{x \to 0^-} 1 + \lim_{x \to 0^-} (e^x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x + 2) = \lim_{x \to 0^+} (3x) + \lim_{x \to 0^+} 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$h(0) = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = h(0) = 2$, podemos concluir que a função h é contínua.
A opção correta é a A.

10.

Pela definição de assíntota não vertical, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) - (mx + b)\big) = 0$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - (2x - 4)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - 2x + 4\big) = 0$$

Logo, a opção correta é a A.

11.

Observando o gráfico dado, podemos concluir que a função h é crescente até se anular, logo, $h'(0) > 0$. Verificamos ainda que as concavidades de h são, primeiro, voltada para cima e depois voltada para baixo, logo, $h''(0) > 0$ e $h''(0) < 0$.
A opção que satisfaz a condição inicial — ser um número positivo — é $h'(0) - h''(0)$.
A opção correta é a C.

12.

Construamos os quadros seguintes, tendo em conta o que nos é dado pelo enunciado:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

Como a primeira derivada de f é negativa em todo o domínio, então, f será decrescente em todo o seu domínio.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f''	$-$		$-$
f	$\frown$		$\frown$

Como a segunda derivada de f é negativa em todo o domínio, então, f terá a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.
Logo, a opção correta é a A.

13.

Observando o gráfico de f, conclui-se que a função f é decrescente em $]-\infty, a]$ e em $[c, e]$ e crescente em $[a, c]$ e em $[e, +\infty[$, logo, $f'(x) < 0$ em $]-\infty, a]$ e em $[c, e]$ e $f'(x) > 0$ em $[a, c]$ e em $[e, +\infty[$.
Quanto ao sentido das concavidades do gráfico de f, é voltada para cima em $]-\infty, b]$ e em $[d, +\infty[$ e voltada para baixo em $[b, d]$, logo, $f''(x) > 0$ em $]-\infty, b]$ e em $[d, +\infty[$ e $f''(x) < 0$ em $[b, d]$.
Logo, a opção correta é a C.

14.

Construamos o seguinte quadro, tendo em atenção o gráfico dado:

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$

De acordo com as opções dadas, a única que se coaduna com o apresentado no quadro acima é o ponto de abcissa c que é um ponto de inflexão.
Logo, a opção correta é a B.

15.

Temos de determinar $A_{sombreada} = A_{círculo} - A_{\Delta[ABC]}$
Como o ângulo $C\widehat{A}B$ está inscrito numa semicircunferência, então, o triângulo $\left[ABC\right]$ é retângulo em A.
Então, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\cos x$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen} x$$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\operatorname{sen} x \times 2\cos x}{2} = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

$$A_{círculo} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

Logo, $A_{sombreada} = A_{circulo} - A_{\Delta[ABC]} = \pi - 2\operatorname{sen} x \cos x = \pi - \operatorname{sen}(2x)$
A opção correta é a A.

16.

À medida que o ponto P se desloca sobre a circunferência, a partir do ponto A, a área da região sombreada aumenta até $x = \frac{\pi}{2}$, que é a altura máxima do triângulo, diminuindo até alcançar o valor zero, para $x = \pi$. O mesmo se verifica quando o valor de x varia entre π a 2π.
Logo, a opção correta é a A.

17.

À medida que o ponto P se desloca sobre a circunferência, a partir do ponto A, a distância aumenta para, a partir de certo momento, diminuir, atingindo um mínimo para $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Quando o ponto P atinge de novo o ponto A, a distância é igual à inicial, ou seja: $d(0) = d(2\pi) = \overline{BA}$
Logo, a opção correta é a B.

18.

Resolve-se a equação:
$A(d) = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{5-d} = 5 \Leftrightarrow 5 = 5(5-d) \Leftrightarrow 5 = 25 - 5d \Leftrightarrow 5 - 25 = -5d \Leftrightarrow -20 = -5d \Leftrightarrow d = 4$
A opção correta é a B.

19.

Calculemos o volume do tanque, cuja forma é um paralelepípedo:

$$V = A_{base} \times h = 7 \times 5 \times 4 = 140 \text{ m}^3$$

Como o volume do tanque é 140 m^3 e a torneira verte 2 m^3 de água por hora, então, o tanque demora $140 \div 2 = 70$ horas a encher, pelo que $t \in \left[0, 70\right]$.
Temos, então,

$$V = A_{base} \times h \Leftrightarrow 2t = 35 \times h \Leftrightarrow h = \frac{2t}{35}$$

Logo, a opção correta é a B.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

Para que a expressão dada tenha significado no conjunto dos números reais, é necessário determinar o seu domínio.

$D = \{x \in \mathbb{R} : 7x + 6 > 0 \wedge x > 0\}$

$7x + 6 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{7} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Logo, $D =]0, +\infty[$

Para este domínio, vem:

$\log_3(7x + 6) \geqslant 2 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geqslant \log_3 9 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geqslant \log_3(9x) \Leftrightarrow 7x + 6 \geqslant 9x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x - 9x \geqslant -6 \Leftrightarrow -2x \geqslant -6 \Leftrightarrow 2x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant 3$

O conjunto solução da inequação será o conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x > 0 \wedge x \leqslant 3$.
Então, o conjunto solução será $]0, 3]$.

2.

2.1 $N = 10\log_{10}(10^2 I) = 10(\log_{10}10^2 + \log_{10} I) = 10(12\log_{10}10 + \log_{10} I) = 10(12 + \log_{10} I) = 120 + 10\log_{10} I$

2.2 $N = 140 \Leftrightarrow 120 + 10\log_{10} I = 140 \Leftrightarrow 10\log_{10} I = 140 - 120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10} I = \frac{20}{10} \Leftrightarrow \log_{10} I = 2 \Leftrightarrow I = 10^2 \Leftrightarrow I = 100$

Para um nível de 140 decibéis, o som tem a intensidade de 100 watt por metro quadrado.

3.

3.1 Comecemos por determinar o valor de: $N(0)$

$$N(0) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01 \times 0}} = \frac{2000}{1 + 199 \times 1} = \frac{2000}{200} = 10$$

$N(0) = 10$ significa que o número inicial de sócios da associação foi 10.

Determinemos, agora, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01t}}\right) = \frac{2000}{1 + 199e^{-\infty}} = \frac{2000}{1 + 199 \times 0} = 2000$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 2000$ significa que o número de sócios tem tendência a estabilizar perto dos 2000.

3.2 Temos de determinar: $N(t) = 1000$

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01t}} = 1000 \Leftrightarrow 2000 = 1000(1 + 199e^{-0{,}01t}) \Leftrightarrow \frac{2000}{1000} = 1 + 199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 1 = 199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow e^{-0{,}01t} = \frac{1}{199} \Leftrightarrow -0{,}01t = \ln\left(\frac{1}{199}\right) \Leftrightarrow t \approx 529{,}33$$

A inscrição do sócio número 1000 comemorou-se ao fim de 530 dias.

4.

4.1 Temos de determinar: $A(p) = 1{,}4$

$$A(p) = 1{,}4 \Leftrightarrow -0{,}52 + 0{,}55\ln(p) = 1{,}4 \Leftrightarrow 0{,}55\ln(p) = 1{,}4 + 0{,}52 \Leftrightarrow \ln(p) = \frac{1{,}92}{0{,}55} \Leftrightarrow p = e^{\frac{1{,}92}{0{,}55}} \Leftrightarrow p = 32{,}8$$

O peso do Ricardo será, aproximadamente, 33 kg.

4.2 Temos de verificar se $A(2p) - A(p)$ é constante.

$$A(2p) - A(p) = -0{,}52 + 0{,}55\ln(2p) - (-0{,}52 + 0{,}55\ln(p)) = -0{,}52 + 0{,}55\ln(2p) + 0{,}52 - 0{,}55\ln(p) =$$

$$= 0{,}55(\ln(2p) - \ln(p)) = 0{,}55\ln\left(\frac{2p}{p}\right) = 0{,}55\ln(2) = 0{,}38$$

Interpretação: este resultado significa que se o peso de um rapaz passa para o dobro, então, a sua altura aumenta 38 cm, aproximadamente.

5.

5.1 Determinemos $f'(x)$.

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x-1}\right)'=\frac{(e^x)'(x-1)-(e^x)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)=0 \Leftrightarrow e^x=0 \lor x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Como $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, o sinal de $f'(x)$ vai ser o mesmo de $x-2$, uma vez que $\frac{e^x}{(x-1)^2}>0$, qualquer que seja o valor de x pertencente a D_f.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f'	–	n.d.	–	0	+
f	↘	n.d.	↘	e^2	↗

$$f(2)=\frac{e^2}{2-1}=e^2$$

Quanto à monotonia, a função f é crescente em $[2,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty,1[$ e em $]1,2[$. Quanto a extremos relativos, a função f tem um mínimo $y=e^2$, para $x=2$, que é o minimizante.

5.2 Para que a expressão tenha significado, é necessário determinar o seu domínio.

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{e^x}{x-1}>0\right\}$$

$$\frac{20\pi+n\pi}{40}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow 20\pi+n\pi=50\pi+80k\pi \Leftrightarrow n\pi=30\pi+80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{30\pi+80k\pi}{\pi} \Leftrightarrow n=30+80k$$

$k=0$

$n=30$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=0^-$$

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{e^x}{x-1}>0\right\}=]1,+\infty[$$

5.3

- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{e^x}{x-1}\right)=\frac{e^1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{e^x}{x-1}\right)=\frac{e^1}{0^-}=-\infty$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, podemos, então, concluir que $x=1$ é assíntota vertical do gráfico de f.

- Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=+0^-$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

6.

- Assíntotas verticais:
  No caso de existirem assíntotas verticais e como a função f é contínua em $]-\pi, 0[$ e em $]0, +\infty[$, apenas as retas de equação $x = -\pi$ ou $x = 0$ poderão ser assíntotas verticais. Então, vem:

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} \left(\frac{3\,\text{sen}(x)}{x^2}\right) = \frac{3\,\text{sen}(-\pi)}{(-\pi)^2} = \frac{-3\,\text{sen}(\pi)}{\pi^2} = 0$$

Podemos concluir que não existe assíntota vertical do gráfico de f para $x \to -\pi$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3\,\text{sen}(x)}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(3 \times \frac{\text{sen}(x)}{x} \times \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 3 \times \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right) \times \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = 3 \times 1 \times 0^- = -\infty$$

Podemos concluir que a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f para $x \to 0$.

- Assíntotas horizontais:
  Como $D_f = [-\pi, +\infty[$, poderá existir uma assíntota horizontal para $x \to +\infty$, uma vez que o intervalo é limitado à esquerda. Então, vem:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-4x+1}\right) = e^{-\infty} = 0$$

Podemos concluir que a reta $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f para $x \to +\infty$.

7.

7.1 Os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são os zeros da função. Então, vamos determinar $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(e) \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = -\sqrt{e} \vee x = \sqrt{e}$$

Os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são: $(-\sqrt{e}, 0)$ e $(\sqrt{e}, 0)$.

7.2 Determinemos: $f'(x)$

$$f'(x) = \left(1 - \ln(x^2)\right)' = (1)' - \left(\ln(x^2)\right)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$

A função f' não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	n. d.	–
f	↗	n. d.	↘

Quanto à monotonia, a função f é crescente em $]-\infty, 0[$ e decrescente em $]0, +\infty[$. Quanto a extremos relativos, como a função f tem derivada e f' é sempre diferente de zero, então, f não admite extremos relativos.

8.

8.1 A função f é contínua no seu domínio, pois é a soma e composição de duas funções contínuas, logo, também é contínua no intervalo $[-2, -1]$.

Vamos determinar $f(-2)$ e $f(-1)$.

$$f(-2) = -(-2) + e^{2\left[(-2)^3 - 1\right]} = 2 + e^{-18} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = -(-1) + e^{2\left[(-1)^3 - 1\right]} = 1 + e^{-4} \approx 1{,}050$$

Como $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$, então, pelo Teorema de Bolzano, existirá pelo menos um valor c, pertencente ao intervalo $]-2, -1[$, tal que $f(c) = 1{,}5$, isto é, $f(x) = 1{,}5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-2, -1[$.

8.2 Sabemos que $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ define a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0. Neste caso, temos $x_0 = 0$. Então, vem:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3 - 1}\right)' = (-x)' + \left(2x^3 - 1\right)'\left(e^{2x^3 - 1}\right) = -1 + 6x^2 e^{2x^3 - 1}$$

$$f'(0) = -1 + 6(0)^2 e^{2 \times 0^3 - 1} = -1$$

$$f(0) = -0 + e^{2 \times 0^3 - 1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Logo,

$$y - \frac{1}{e} = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{e}$$

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$ é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

9.

9.1 A função f é contínua no seu domínio, pois é a diferença entre duas funções contínuas, logo, é também contínua em $[0, \pi]$.

Tem-se:

$$f(0) = 2 \times 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1, \text{ então, } f(0) < 0$$

$$f(\pi) = 2 \times \pi - \cos\pi = 2\pi - (-1) = 2\pi + 1, \text{ então, } f(\pi) > 0$$

Podemos, assim, concluir que, como a função f é contínua em $[0, \pi]$ e $f(0) \times f(\pi) < 0$, pelo Teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um zero da função no intervalo $]0, \pi[$.

9.2 Determinemos: $f'(x)$

$f'(x) = (2x - \cos x)' = (2x)' - (\cos x)' =$
$= 2 - (-\text{sen}\, x) = 2 + \text{sen}\, x$

$-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 - 1 \leqslant 2 + \text{sen}\, x \leqslant 1 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant f'(x) \leqslant 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Então,

$$f'(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ logo}, f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Podemos, então, concluir que a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, não podendo ter mais do que um zero, cuja existência se provou na alínea anterior.

9.3 Temos que o declive da reta r é tan 45° = 1, então, uma equação da reta r, que contém o ponto $A(-3, 0)$, será:

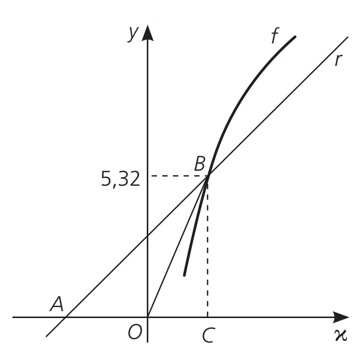
$y = mx + b \Leftrightarrow 0 = 1(-3) + b \Leftrightarrow b = 3$, logo $y = x + 3$

O ponto B será, assim, o ponto de interseção do gráfico da função f com a reta r.

Inserimos na calculadora:

- $y_1 = 2x - \cos x$
- $y_1 = x + 3$
- Janela de visualização: $[2, 3] \times [5, 6]$

Obtemos o seguinte gráfico:



As coordenadas do ponto B, que nos dá a altura do triângulo $[ABC]$, são, com aproximação às décimas: $(2,3 ; 5,3)$.

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ será:

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BC}}{2} = \frac{3 \times 5,3}{2} = 7,95 \approx 8$$

10.

10.1 Determinemos: $f'(x)$

$f'(x) = \left(1 + 3x^2e^{-x}\right)' = (1)' + \left(3x^2e^{-x}\right)' = \left(3x^2\right)' \cdot \left(e^{-x}\right) + \left(3x^2\right) \cdot \left(e^{-x}\right)' =$

$= 6xe^{-x} + \left(3x^2\right) \cdot (-x)' \cdot \left(e^{x}\right) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} = e^{-x}\left(6x - 3x^2\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(6x - 3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{impossível}} \vee 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(6 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 6 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	min.	↗	Máx.	↘

$f(0) = 1 + 3(0)^2 \cdot e^{-0} = 1$

A função f tem um único mínimo para $x = 0$, que é $y = 1$.

10.2 Temos de provar que existe um valor de x pertencente a $]-1, 0[$, tal que $f(x) = 4$.

Assim, como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $[-1, 0]$ e:

$f(-1) = 1 + 3(-1)^2 \cdot e^{-(-1)} = 1 + 3e \approx 9{,}15$

$f(0) = 1 + 3(0)^2 \cdot e^{0} = 1$

Podemos, então, concluir que, como a função f é contínua em $[-1, 0]$ e $f(-1) < 4 < f(0)$, pelo Teorema de Bolzano, existe um valor de x pertencente a $]-1, 0[$, tal que: $f(x) = 4$

11.

11.1 Utilizando a definição de derivada, vem:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x - (0 - \operatorname{sen} 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Logo, $f'(0) = 2$.

11.2 Determinemos $f'(x)$ e $f''(x)$.

$f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)' = (x)' + (\operatorname{sen} x)' = 1 + \cos x$

$f''(x) = (1 + \cos x)' = (1)' + (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, vem $x = 0 \times \pi = 0$.

Para $k = 1$, vem $x = 1 \times \pi = \pi$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f''	+	+	0	–	0	+	+
f		∪	P. I.	∩	P. I.	∪	

$f(0) = 0 + \operatorname{sen} 0 = 0$

$f(\pi) = \pi + \operatorname{sen} \pi = \pi$

A função f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \pi[$ e voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e em $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

A função f tem dois pontos de inflexão de coordenadas $(0, 0)$ e (π, π).

11.3

$$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x - x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1$, vem $x = \frac{\pi}{4} + (-1)\pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

Para $k = 0$, vem $x = \frac{\pi}{4} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$

Para $k = 1$, vem $x = \frac{\pi}{4} + 1 \times \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

Como $x = -\frac{3\pi}{4}$ não pertence a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, o conjunto solução será $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

12.

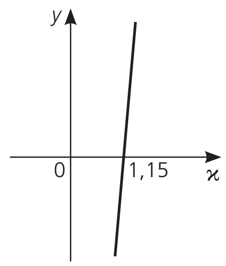
Determinemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \left((x + 1)e^x - 10x\right)' = (x + 1)'e^x + (x + 1)(e^x)' - (10x)' = 1 \times e^x + (x + 1)e^x - 10 =$$
$$= e^x(1 + x + 1) - 10 = e^x(x + 2) - 10$$

Inserimos na calculadora:

- $y_1 = e^x(x + 2) - 10$
- janela de visualização: $[-2, 3] \times [-10, 5]$

Obtemos o seguinte gráfico:

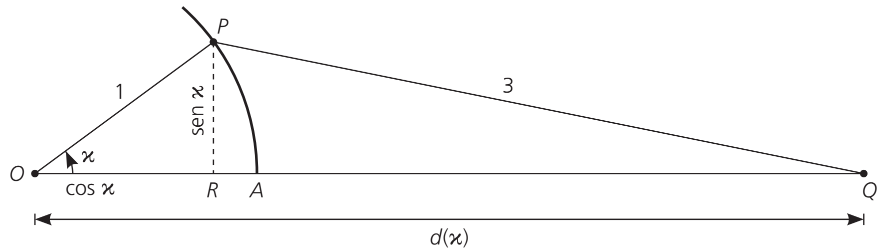


Verificamos que o único zero da função f'' é, aproximadamente, $x \approx 1,2$.

13.

13.1 O ponto P coincide com o ponto A para $x = 0$, então, a distância do ponto Q ao ponto O é igual a $3 + 1 = 4$.
Para $x = \pi$, o ponto P coincide com o ponto B, então a distância do ponto Q ao ponto O é igual a $3 - 1 = 2$.
Como $d(0) = 4$ e $d(\pi) = 2$, então, temos que $d(0) = 2d(\pi)$, o que verifica a veracidade da afirmação I.
Quando x varia de 0 a π, o ponto P percorre a distância entre A e B (semicircunferência acima do diâmetro $[AB]$), verificando-se a aproximação do ponto Q ao ponto O. Assim, em $[0, \pi]$, $d(x)$ vai diminuindo à medida que aumenta o valor de x, pelo que a função d é decrescente em $[0, \pi]$.
Esta situação não se verifica quando x varia entre π e 2π: o ponto P percorre a distância entre B e A (semicircunferência abaixo do diâmetro $[AB]$), verificando-se um afastamento entre o ponto Q e o ponto O. Assim, em $[\pi, 2\pi]$, $d(x)$ vai aumentando à medida que o valor de x também aumenta, pelo que a função d é crescente em $[\pi, 2\pi]$. Conclui-se, então, que a função d' não pode ser negativa em $[\pi, 2\pi]$ e, portanto, a afirmação II é falsa.

13.2 De acordo com a sugestão dada, temos:



Tendo em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OR} = \cos x$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[PQR]$, vem:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 \Leftrightarrow 3^2 = \operatorname{sen}^2 x + \overline{QR}^2 \Leftrightarrow \overline{QR}^2 = 9 - \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \overline{QR} = \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Assim, temos:

$$\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} \Leftrightarrow d(x) = \cos x + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$$

14.

14.1 Para determinarmos a área total da pirâmide quadrangular dada, temos de calcular $A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$.
Assim, consideremos, na pirâmide dada, o triângulo retângulo $[EFG]$:

$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

Consideremos, agora, a face $[BCE]$ e determinemos a sua área.

$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Assim, a área lateral da pirâmide quadrangular será:

$$A_{lateral} = 4 \times A_{[BCE]} = \frac{4}{\cos x}$$

A área da base da pirâmide quadrangular será:

$$A_{base} = \overline{BC}^2 = 2^2 = 4$$

Logo,

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4 + 4\cos x}{\cos x}$$

14.2

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{4 + 4\cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{4 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4 + 0^+}{0^+} = +\infty$$

Interpretação: À medida que o valor de x aumenta, as arestas laterais da pirâmide vão tornar-se retas perpendiculares à base, logo, a área total da pirâmide vai aumentar infinitamente.

15.

15.1 Sabemos que a função v é contínua, então, $\lim_{t \to 5^-} v(t) = \lim_{t \to 5^+} v(t) = v(5)$

Assim, tem-se: $v(5) = 6 + 27e^{-1,7(5-5)} = 6 + 27e^{0} = 6 + 27 = 33$

Então:

$$\lim_{t \to 5^-} v(t) = v(5) \Leftrightarrow 55\left(1 - e^{5k}\right) = 33 \Leftrightarrow 1 - e^{5k} = \frac{33}{55} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{5k} = 1 - \frac{33}{55} \Leftrightarrow e^{5k} = 0,4 \Leftrightarrow 5k = \ln 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln 0,4}{5} \Leftrightarrow k \approx -0,183$$

15.2 Para $t \geqslant 5$ vem: $v'(t) = 27e^{-1,7(t-5)} \times (-1,7) = -45,9e^{-1,7(t-5)}$

Como para $t \geqslant 5$ $v'(t) < 0$, então, podemos concluir que a função v é decrescente.

Interpretação: A velocidade a que o paraquedista se desloca vai diminuindo assim que se abre o paraquedas.

15.3 Sabe que para $v(5) = 33$, determinemos agora para outros valores de $t \geqslant 5$.

$$v(10) = 6 + 27e^{-1,7(10-5)} = 6 + 27e^{-8,5} \approx 6,005$$

$$v(50) = 6 + 27e^{-1,7(50-5)} = 6 + 27e^{-76,5} = 6$$

Observando estes resultados, e tendo em conta a conclusão a que se chegou na questão anterior, podemos concluir que a afirmação é verdadeira.

16.

Consideremos $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = f(x) - f(x+1)$

Como a função f é contínua no intervalo $[0, 2]$, então, a função g também é contínua em todo o seu domínio $[0, 1]$.

Assim, vem:

$$g(0) = f(0) - f(1) = 0 - f(1) = -f(1) < 0$$

$$g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1) > 0$$

Como $f(1) > 0$, então, $g(0) < 0$, e como $f(1) > 0$, então, $g(1) > 0$. Logo, $g(0) \times g(1) < 0$

Então, pelo Teorema de Bolzano, a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$, existindo pelo menos um número real c, no intervalo $]0, 1[$, tal que: $f(c) = f(c+1)$

Trigonometria e Números Complexos

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$. Qual poderá ser um argumento do simétrico de z?

(A) $-\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\pi + \frac{\pi}{5}$ **(C)** $\pi - \frac{\pi}{5}$ **(D)** $2\pi + \frac{\pi}{5}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 1.ª chamada

2.

Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z + \bar{z} = 0$ **(B)** $\operatorname{Im}(z) = 1$ **(C)** $|z| = 0$ **(D)** $z - \bar{z} = 0$

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 1.ª chamada

3.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2i$

Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2.
Sabe-se que o segmento de reta $[P_1P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w.
Qual é o valor de n?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

Exame Nacional do 12.º ano, 2005, 1.ª fase

4.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária. Seja n um número natural, tal que: $i^n = -i$
Indique qual dos seguintes é o valor de: i^{n+1}

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 2.ª fase

5.

Seja $z = 3i$ um número complexo.
Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

Exame Nacional do 12.º ano, 2008, 1.ª fase

6.

Seja k um número real e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

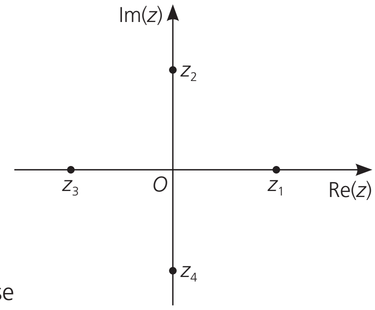
Exame Nacional do 12.º ano, 2009, 2.ª fase

7.

Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.

Indique o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a:

$$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$$

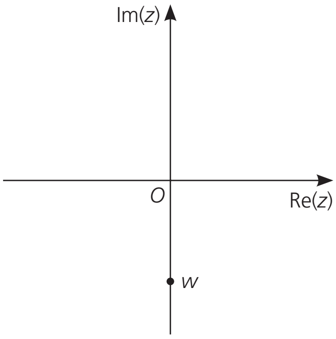


(A) z_1 **(C)** z_3
(B) z_2 **(D)** z_4

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

8.

Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura.



A qual das retas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6?

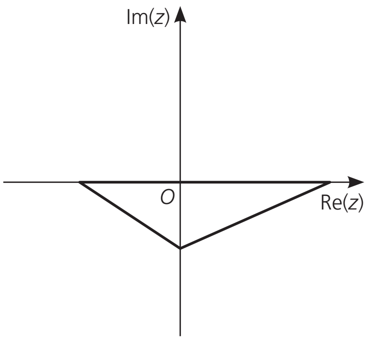
(A) Eixo real.
(B) Eixo imaginário.
(C) Bissetriz dos quadrantes ímpares.
(D) Bissetriz dos quadrantes pares.

Exame Nacional do 12.º ano, 2010, 2.ª fase

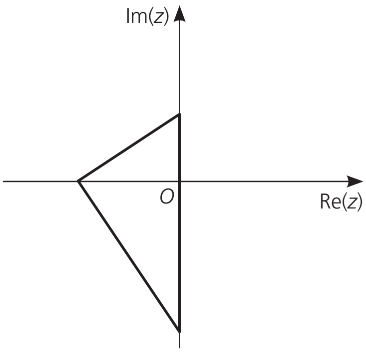
9.

Seja b um número real positivo e $z_1 = bi$ um número complexo.
Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

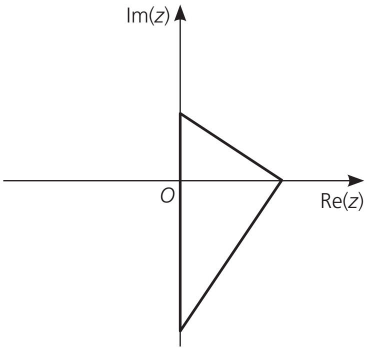
(A)



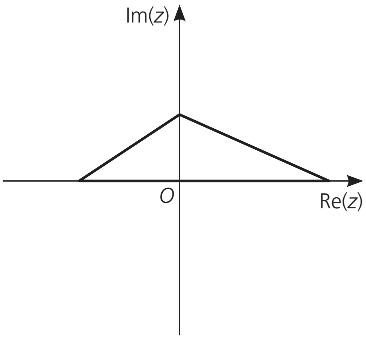
(C)



(B)



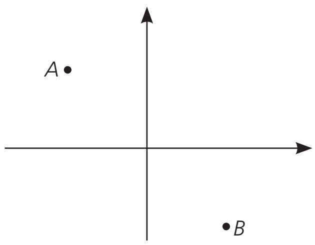
(D)



Exame Nacional do 12.º ano, 2009, 1.ª fase

10.

Os pontos *A* e *B*, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo *z*.



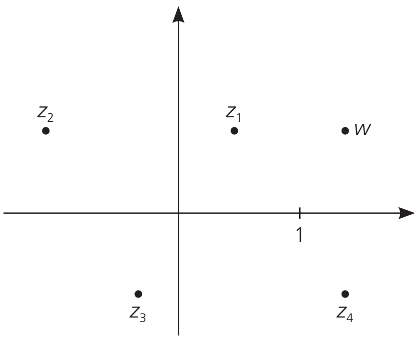
Qual dos números complexos seguintes pode ser *z*?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 1.ª fase

11.

Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?

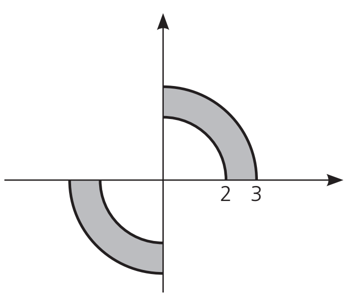
(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 2.ª fase

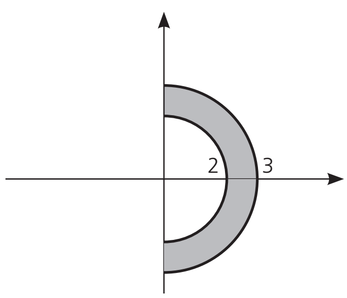
12.

Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das raízes quadradas de $3 + 4i$?

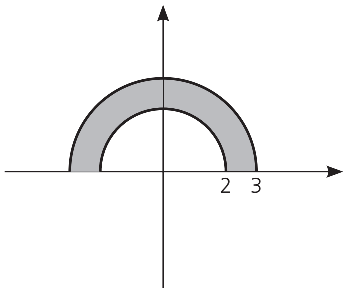
(A)



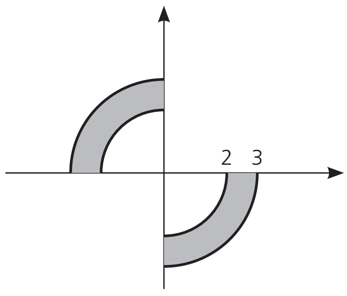
(C)



(B)



(D)



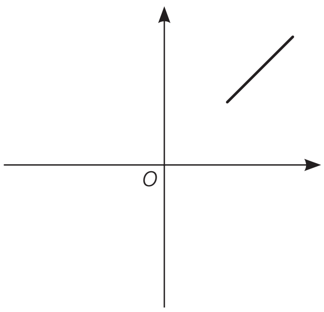
Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 2.ª fase

13.

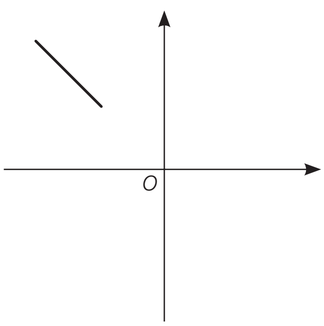
Indique qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C}: |z+1| = |z-i| \wedge 2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4\}$$

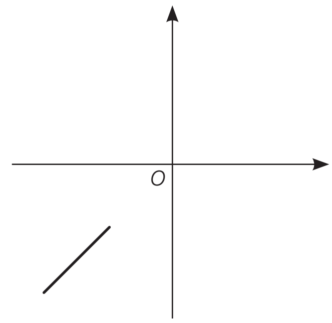
(A)



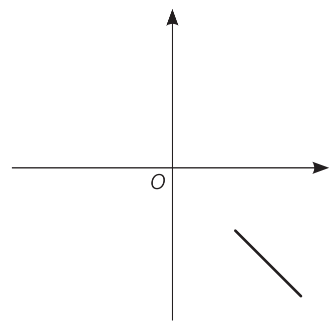
(B)



(C)



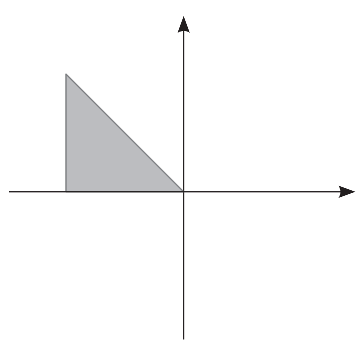
(D)



Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 2.ª chamada

14.

Na figura, está representado, no plano complexo, um triângulo retângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais.
Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 0 \wedge |z| \leqslant 1$

(B) $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \wedge |z| \leqslant 1$

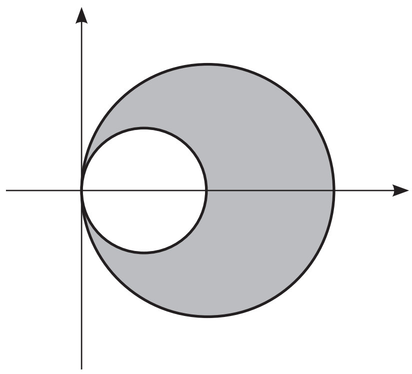
(C) $\operatorname{Re}(z) \geqslant -1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \wedge |z-i| \geqslant |z+1|$

(D) $\operatorname{Re}(z) \geqslant -1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \wedge |z-i| \leqslant |z-1|$

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 1.ª fase

15.

Na figura, estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geqslant 1 \wedge |z-2| \leqslant 2$

(B) $|z-1| \geqslant 2 \wedge |z-2| \leqslant 1$

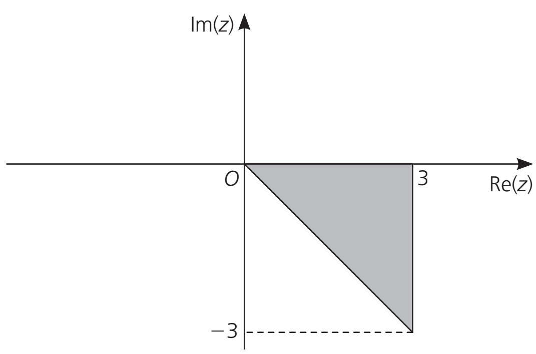
(C) $|z-1| \leqslant 1 \wedge |z-2| \geqslant 2$

(D) $|z-1| \leqslant 2 \wedge |z-2| \geqslant 1$

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 2.ª fase

16.

Considere a figura, representada no plano complexo.



Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\operatorname{Re}(z) \leqslant 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$

(B) $\operatorname{Re}(z) \leqslant 3 \wedge 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$

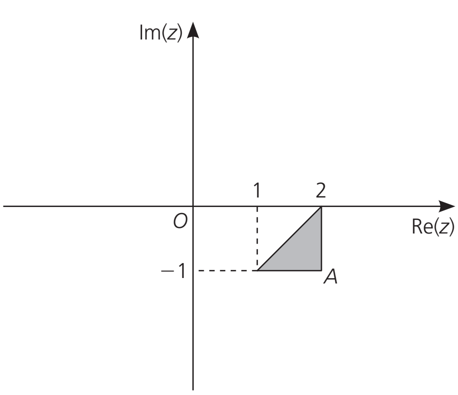
(C) $\operatorname{Im}(z) \leqslant 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$

(D) $\operatorname{Re}(z) \geqslant 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$

Exame Nacional do 12.º ano, 2008, 2.ª fase

17.

Na figura, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas $(2, -1)$.
Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?



(A) $|z-1| \geqslant |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant -1$

(B) $|z-1| \leqslant |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant -1$

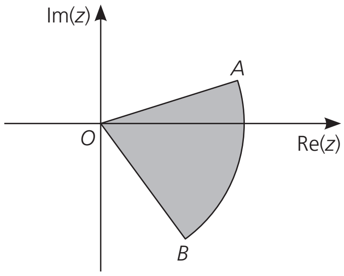
(C) $|z+1| \geqslant |z-(2+i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant -1$

(D) $|z-1| \geqslant |z-(2-i)| \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geqslant -1$

Exame Nacional do 12.º ano, 2009, 2.ª fase

18.

Na figura, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.



Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 2.º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo: $32 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$.

Qual dos números seguintes é o valor da área do setor circular AOB?

(A) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{2\pi}{5}$

(D) $\frac{8\pi}{5}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

19.

Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i.

(B) -1 e i.

(C) $1 - i$ e $1 + i$.

(D) $1 - i$ e $-1 + i$.

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 1.ª fase

20.

Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do simétrico de z?

(A) $-\frac{\pi}{5}$

(B) $\pi + \frac{\pi}{5}$

(C) $\pi - \frac{\pi}{5}$

(D) $2\pi + \frac{\pi}{5}$

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 2.ª chamada

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

Seja A o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

1.1 Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de A contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

1.2 Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo: $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ pertence ao conjunto A.

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 1.ª chamada

2.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam: $z_1 = 3 + yi$ e $z_2 = 4iz_1$
(i é a unidade imaginária e y designa um número real).

2.1 Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
Admitindo que $\arg(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\arg(-z_2)$ em função de α.

2.2 Sabendo que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 2.ª fase

3.

Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = -6 + 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 1.ª fase

4.

Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos).
Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

Exame Nacional do 12.º ano, 2004, 1.ª fase

5.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 1$, $z_2 = 5i$ e $z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right)$, $n \in \mathbb{N}$
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

5.1 O complexo z_1 é raiz do polinómio: $z^3 - z^2 + 16z - 16$
Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.
Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

5.2 Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 1.ª fase

6.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $w = 2 + i$ (i designa unidade imaginária).

6.1 Determine $(w-2)^{11}(1+3i)^2$ na forma algébrica.

6.2 Averigue se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 2.ª fase

7.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa unidade imaginária.

7.1 Considere: $w = \frac{2+i}{1-i} - i$

Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

7.2 Considere: $z_1 = \operatorname{cis}(\alpha)$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame Nacional do 12.º ano, 2005, 1.ª fase

8.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa unidade imaginária.

8.1 Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{4 + 2i\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

8.2 Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, $\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1 \wedge \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{5\pi}{4}$ e determine a sua área.

Exame Nacional do 12.º ano, 2006, 1.ª fase

9.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ e $z_2 = 8\operatorname{cis} 0$ (i designa unidade imaginária).

9.1 Mostre, sem recorrer à calculadora, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

9.2 No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 \cdot i^{46}$, respetivamente.

Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

Exame Nacional do 12.º ano, 2008, 1.ª fase

10.

$\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

10.1 Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{(\sqrt{3} - 2i)^2 + \left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

10.2 Seja α um número real.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, tais que:

- $z_1 = \operatorname{cis}\alpha$
- $z_2 = \operatorname{cis}(\alpha + \pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 1.ª fase, 2.ª chamada

11.

Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

11.1 Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

11.2 Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O, em que:

- A é a imagem geométrica de z_1;
- B é a imagem geométrica de z_2;
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$.

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 1.ª fase, 1.ª chamada

12.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

12.1 Determine o número complexo: $w = \dfrac{z_1^4 + 4i}{i}$

12.2 Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1.

Exame Nacional do 12.º ano, 2010, 2.ª fase

13.

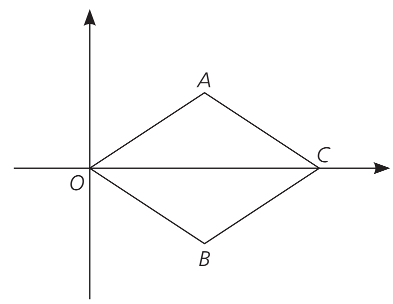
Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Exame Nacional 12.º ano, 2009, 2.ª fase

14.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis}\alpha \left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

14.1 Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$.
A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respetivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, w.
Justifique que $w = \cos\alpha$.



14.2 Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\dfrac{z^3}{i}$ é um número real.

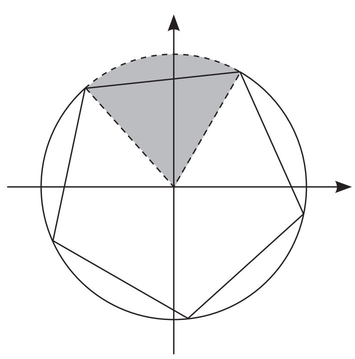
Exame Nacional do 12.º ano, 2007, 1.ª fase

15.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja: $z_1 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

15.1 Sem recorrer à calculadora, verifique que $\dfrac{z_1^3 + 2}{i}$ é um imaginário puro.

15.2 No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura.
Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.



Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, excluindo a fronteira.

Exame Nacional do 12.º ano, 2001, 1.ª fase, 1.ª chamada

16.

- $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos;
- i designa a unidade imaginária.

16.1 Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1 + \sqrt{3}\,i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

16.2 Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à reta definida pela condição $\text{Re}(z) = -2$.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Represente, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, determine z, na forma algébrica.

Exame Nacional do 12.º ano, 2003, 2.ª fase

17.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

17.1 Determine os números reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio: $x^2 + bx + c$

17.2 Seja: $z_2 = \text{cis}\,\alpha$
Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

Exame Nacional do 12.º ano, 2002, 2.ª fase

18.

De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- Um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{3}$.
- O módulo de z_2 é 4.

18.1 Seja: $w = \frac{-1+i}{i}$
Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2.

18.2 z_1 e z_2 são duas raízes quartas de um certo número complexo z.
Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

Exame Nacional do 12.º ano, 2000, 1.ª fase, 2.ª chamada

19.

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva as duas questões seguintes, sem recorrer à calculadora.

19.1 Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

19.2 Seja z um número complexo, tal que $|z| = 1$.
Mostre que: $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

Exame Nacional do 12.º ano, 2011, 2.ª fase

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.

Seja $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, então, o seu simétrico será $-z = \rho \operatorname{cis}(\pi + \theta)$, uma vez que dois números simétricos têm os seus afixos simétricos em relação à origem do plano complexo.

Logo, o argumento de z será $\arg(-z) = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{5}$

A opção correta será a B.

2.

A condição que define, no plano complexo, o eixo imaginário é $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Logo, sabendo que $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, vamos verificar se a opção A é correta. Vem:

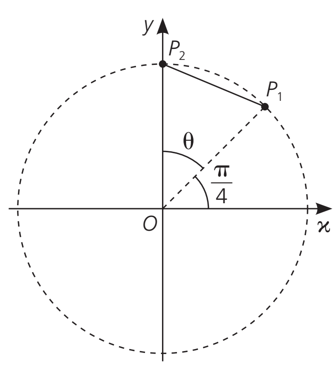
$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (a + bi) + (a - bi) = 0 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Como a parte real do complexo z é 0, então, a opção correta será a A.

3.

O número complexo $z_2 = 2i$ é um imaginário puro, isto é, a sua parte real é igual a 0, cujo coeficiente é positivo, logo, $\frac{\pi}{2}$ será um argumento de z_2.

No plano complexo, podemos representar P_1 e P_2 do seguinte modo:



Então, $\theta = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Assim, $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n = \frac{8\pi}{\pi} \Leftrightarrow n = 8$

A opção correta será a C.

4.

Vamos resolver i^{n+1}. Assim, vem:

$$i^{n+1} = i^n \times i^1 = -i \times i = -i^2 = -(-1) = 1$$

A opção correta será a A.

5.

O número complexo $z = 3i$ é um imaginário puro, isto é, a sua parte real é igual a 0, cujo coeficiente é positivo, logo, $\frac{\pi}{2}$ será um argumento de z.

A opção correta será a B.

6.

Vamos desenvolver $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$. Assim, vem:

$$z_1 = (k - i)(3 - 2i) = 3k - 2ki - 3i + 2i^2 = 3k - 2ki - 3i - 2 = 3k - 2 - 2ki - 3i = (3k - 2) - (2k + 3)i$$

Para que um número complexo seja um imaginário puro, a sua parte real tem de ser igual a 0, então, vem:

$$3k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

A opção correta será a C.

7.

Vamos determinar $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$. Assim, vem: $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i + (-1) = 1 + i - 1 = i$

Como o valor do módulo de i é igual a 1, logo, $\frac{\pi}{2}$ será o valor do seu argumento. Assim, o número complexo correspondente a este argumento é z_2.

A opção correta será a B.

8.

Por observação do plano complexo representado na figura dada, podemos concluir que: $w = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Então, $w^6 = \rho^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi) = \rho^6 \operatorname{cis} \pi$

Assim, a representação geométrica de w^6 pertence ao eixo real.

A opção correta será a A.

9.

Como $z_1 = bi$, vem:

$(z_1)^2 = (bi)^2 = b^2 \times i^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$, logo, podemos concluir que a imagem geométrica de $(z_1)^2$ será o ponto de coordenadas $(-b^2, 0)$, isto é, um ponto pertencente ao semieixo real negativo.

$(z_1)^3 = (bi)^3 = b^3 \times i^3 = b^3 \times (-i) = -b^3 i$, logo, podemos concluir que a imagem geométrica de $(z_1)^3$ será o ponto de coordenadas $(0, -b^3 i)$, isto é, um ponto pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Para $z_1 = bi$, temos que a sua imagem geométrica será o ponto de coordenadas $(0; b)$, isto é, um ponto pertencente ao semieixo imaginário positivo.

A opção correta será a C.

10.

Sabemos que as raízes quadradas de 1 são 1 e −1, pelo que podemos descartar as opções A e C, e que as raízes quadradas de −1 são i e $-i$.

Ora, como $i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, calculemos, pela Fórmula de Moivre respetiva, as suas raízes quadradas.

$$\sqrt{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \{0,1\}$$

$k = 0 \rightarrow z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + 0 \times \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, afixo pertencente ao 1.º quadrante.

$k = 1 \rightarrow z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + 1 \times \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, afixo pertencente ao 3.º quadrante.

Como $-i = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, calculemos, pela Fórmula de Moivre respetiva, as suas raízes quadradas.

$$\sqrt{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right), k \in \{0,1\}$$

$k = 0 \rightarrow z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + 0 \times \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, afixo pertencente ao 2.º quadrante

$k = 1 \rightarrow z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + 1 \times \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, afixo pertencente ao 4.º quadrante

A opção correta será a D.

11.

Consideremos o número complexo $w = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. Então, vem:

$$1 - w = 1 - (a + bi) = 1 - a - bi = \underbrace{(1 - a)}_{< 0} - \underbrace{bi}_{< 0}$$

Verificamos que tanto a parte real como a parte imaginária de $1 - w$ são negativas, logo, podemos concluir que $1 - w$ pertence ao 3.º quadrante do plano complexo, pelo que $1 - w$ pode ser igual a z_3.

A opção correta será a C.

12.

Comecemos por passar o número complexo $z = 3 + 4i$ para a forma trigonométrica.

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Então, $z = 5 \operatorname{cis} \theta$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, uma vez que a imagem geométrica do número complexo pertence ao 1.º quadrante.

Calculemos, pela Fórmula de Moivre respetiva, as raízes quadradas de $z = 5 \operatorname{cis} \theta$.

$\sqrt{z} = \sqrt{5 \operatorname{cis} \theta} = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right), k \in \{0, 1\}$

$k = 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2 \times 0 \times \pi}{2}\right) = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$k = 1 \rightarrow z_1 = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2 \times 1 \times \pi}{2}\right) = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)$

Sabemos que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então, vem:

$\frac{1}{2} \times 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} \times 0 + \pi < \frac{\theta}{2} + \pi < \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \pi \Leftrightarrow \pi < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$

Assim, podemos concluir que as imagens geométricas do número complexo $z = 3 + 4i$ pertencem ao 1.º e ao 3.º quadrantes.

A opção correta será a A.

13.

Para $|z + 1| = |z - i|$, temos a mediatriz do segmento de reta, em que os extremos são as imagens geométricas de -1 e de i.

Para $2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$, temos parte do plano complexo limitado pelas retas de equação:

$$y = 2 \text{ e } y = 4$$

A opção correta será a B.

14.

Para $\operatorname{Re}(z) \geqslant -1$, temos o semiplano localizado à direita da reta de equação $x = -1$, incluindo a fronteira.

Para $\operatorname{Im}(z) \geqslant 0$, temos o semiplano localizado acima do eixo real, incluindo a fronteira.

Para $|z - i| \geqslant |z + 1|$, temos o semiplano localizado abaixo da mediatriz do segmento de reta, em que os extremos são as imagens geométricas de 1 e de i, incluindo a fronteira.

A opção correta será a C.

15.

Para $|z - 1| \geqslant 1$, temos todos os pontos pertencentes ao exterior de uma circunferência de centro no ponto $(1, 0)$ e raio 1.

Para $|z - 2| \leqslant 2$, temos todos os pontos do interior de uma circunferência de centro no ponto $(2, 0)$ e raio 2.

A opção correta será a A.

16.

Para $\text{Re}(z) \leqslant 3$, temos o semiplano localizado à esquerda da reta de equação $x = 3$, incluindo a fronteira.

Para $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$, temos a porção do plano complexo definido pelo ângulo com o lado origem igual a $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$ e o lado extremidade igual a: $\arg(z) = 0$

A opção correta será a A.

17.

Para $|z - 1|$, temos a distância de z à imagem geométrica de 1.

Para $|z - (2 - i)|$, temos a distância de z à imagem geométrica do ponto A.

Então, $|z - 1| \geqslant |z - (2 - i)|$ é o semiplano delimitado pela mediatriz do segmento de reta de extremos 1 e A e que contém A.

Para $\text{Re}(z) \leqslant 2 \wedge \text{Im}(z) \geqslant -1$, temos a porção do plano complexo localizado à esquerda da reta de equação $x = 2$ e acima da reta de equação $y = -1$.

A opção correta será a A.

18.

Como os vértices do polígono regular são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, então, o raio da circunferência será $r = \sqrt[5]{32} = 2$ e a amplitude do ângulo compreendido entre duas raízes consecutivas será $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Então, calculemos a área do setor circular, usando a fórmula $A = \frac{r^2 \times \alpha}{2}$, em que r é o raio da circunferência e α é a amplitude do ângulo.

$$A = \frac{2^2 \times \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{4 \times \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{8\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$$

A opção correta será a B.

19.

Verificamos que $|w| \neq |z_2|$, porque $1 - i$ e $-1 + i$ são números complexos simétricos, logo, são raízes quadradas do mesmo número complexo.

Logo, a opção correta é a D.

20.

Sabemos que dois números complexos simétricos têm os seus afixos simétricos em relação à origem do plano de Argand, então, vem

$$z = \rho \text{ cis } \theta, \text{ logo, } -z = \rho \text{ cis}(\pi + \theta)$$

e, assim:

$$\arg(-z) = \pi + \frac{\pi}{5}$$

A opção correta é a B.

Trigonometria e Números Complexos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1 Sabemos que o 2.º quadrante do plano complexo é definido pela condição $\text{Re}(z) < 0 \land \text{Im}(z) > 0$, excluindo os eixos do referencial. Assim, a parte do conjunto A, definido por $A = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, contida no 2.º quadrante, excluindo os eixos do referencial, é definida pela condição $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1 \land \text{Re}(z) < 0 \land \text{Im}(z) > 0\}$.

1.2 Vamos determinar: $\dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Representemos $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica:

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Então, vem $z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{4}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Como o módulo do quociente é $\frac{1}{2}$, logo, menor do que 1, então, o número complexo $\dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ pertence ao conjunto A.

2.

2.1 Sabemos que $z_1 = 3 + yi$ e que $z_2 = 4iz_1$. Sabemos também que $\arg(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então, vamos admitir que $|z_1| = \rho$.

Assim, na forma trigonométrica, $z_1 = \rho\,\text{cis}\,\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Temos $-z_2 = -4iz_1 = -4i \times \rho\,\text{cis}\,\alpha^{(1)}$

Na forma trigonométrica, $-4i$ será: $|-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \text{sen}\,\theta = -\dfrac{4}{4} = -1 \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$-4i = 4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

De (1), vem: $-z_2 = -4iz_1 = -4i \times \rho\,\text{cis}\,\alpha = 4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \times \rho\,\text{cis}\,\alpha = 4\rho\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Então, $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

2.2 Temos $z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = -4y + 12i$

Então, $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \Leftrightarrow y = 12$

Assim, $z_2 = -4y + 12i = -4 \times 12 + 12i = -48 + 12i$

3.

Calculemos: $\dfrac{z_1 + i^{23}}{z_2}$

$$\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = \frac{-6 + 3i + i^{23}}{1 - 2i} = \frac{-6 + 3i + i^3}{1 - 2i} = \frac{-6 + 3i - i}{1 - 2i} = \frac{-6 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(-6 + 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} =$$

$$= \frac{-6 - 12i + 2i - 4}{1 - 4i^2} = \frac{-10i - 10}{1 + 4} = \frac{-10i - 10}{5} = -\frac{10i}{5} - \frac{10}{5} = -2 - 2i$$

Passemos o complexo para a forma trigonométrica:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

Assim, o número complexo pedido será: $2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

4.

Consideremos o número complexo: $z = \rho\,\text{cis}\,\theta$, com $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

Assim, $z^3 = \rho^3\,\text{cis}(3\theta)$, então, $0 < 3\theta < \dfrac{3\pi}{2}$, logo, z^3 não pertence ao 4.º quadrante.

5.

5.1 Como o complexo z_1 é raiz do polinómio, vamos aplicar a Regra de Ruffini ao polinómio dado.

	1	–1	16	–16
1		1	0	16
	1	0	16	0 = resto

Então, vem: $z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2+16)$

Resolvamos a equação seguinte para se obterem as restantes raízes do polinómio:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16i} \Leftrightarrow z = -4i \vee z = 4i$$

Na forma trigonométrica, $-4i$ será: $|-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{4}{4} = -1 \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \qquad -4i = 4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Na forma trigonométrica, $4i$ será: $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 4i = 4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Assim, as raízes do polinómio são: $1 = \text{cis}\,0$, $-4i = 4\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ e $4i = 4\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

5.2 Como $z_2 = 5i = 5\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, então vem:

$$z_2 \times z_3 = 5\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \text{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\left(\frac{20\pi + n\pi}{40}\right)$$

Como $z_2 \times z_3$ tem de pertencer ao terceiro quadrante e à bissetriz dos quadrantes ímpares, vem:

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow n\pi = 30\pi + 80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{30\pi + 80k\pi}{\pi} \Leftrightarrow n = 30 + 80k$$

para $k = 0$, vem $n = 30$.

6.

6.1 Calculemos $(w-2)^{11}(1+3i)^2$, sabendo que: $w = 2 + i$

$$(w-2)^{11}(1+3i)^2 = (2+i-2)^{11}(1+3i)^2 = i^{11}(1+6i+9i^2) = i^3(1+6i-9) = -i(-8+6i) = 8i - 6i^2 = 6 + 8i$$

6.2 Determinemos o inverso de w, isto é, $\frac{1}{w}$.

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{2+i}=\frac{1(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2-i}{4+1}=\frac{2-i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

Passemos $\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ para a forma algébrica:

$$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1+i$$

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\neq-1+i$$

Assim, podemos concluir que inverso de w não é igual a: $\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

7.

7.1 Vamos determinar: $w=\frac{2+i}{1-i}-i$

$$w=\frac{2+i}{1-i}-i=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}-i=\frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}-i=\frac{2+2i+i-1}{1+1}-i=$$

$$=\frac{1+3i}{2}-\frac{2i}{2}=\frac{1+3i-2i}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Passemos w para a forma trigonométrica: $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\text{sen}\,\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\qquad w=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

7.2 Vamos determinar z_1+z_2, sendo $z_1=\text{cis}(\alpha)$ e $z_1=\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$z_1+z_2=\text{cis}(\alpha)+\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha+i\cos\alpha=(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)+(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)i$$

Verificamos que $\text{Re}(z_1+z_2)=\text{Im}(z_1+z_2)$, pelo que podemos concluir que a imagem geométrica pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

8.

8.1 Vamos determinar: $\dfrac{4+2i\left(\text{cis}\,\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$

$$\frac{4+2i\left(\text{cis}\,\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}=\frac{4+2i\left(\text{cis}\,\frac{6\pi}{6}\right)}{3+i}=\frac{4+2i(\text{cis}\,\pi)}{3+i}=\frac{4+2i(-1)}{3+i}=\frac{4-2i}{3+i}=\frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=$$

$$=\frac{12-4i-6i+2i^2}{9-i^2}=\frac{12-10i-2}{9+1}=\frac{10-10i}{10}=\frac{10}{10}-\frac{10}{10}i=1-i$$

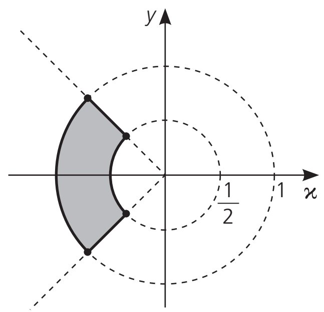
Passemos $1-i$ para a forma trigonométrica: $|1-i|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=(1+1)=\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\text{sen}\,\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\theta=\frac{7\pi}{4}\qquad 1-i=\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

8.2 A área da região do plano complexo definida por $\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1$ será duas circunferências, com centro na origem, e em que o raio da circunferência exterior é o dobro da circunferência interior.

A área da região do plano complexo definida por $\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{5\pi}{4}$ será a bissetriz do 2.º quadrante e a bissetriz do 3.º quadrante.

Assim, a área da região do plano complexo pedida no enunciado será:



Calculemos, então, a área sombreada:

$$A_{\text{circunferência de raio } 1} = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$A_{\text{circunferência de raio } \frac{1}{2}} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

Assim, a área pedida é de $\frac{3\pi}{16}$ unidades de área.

9.

9.1 Vamos determinar $-z_1$ e depois vamos passá-lo para a forma trigonométrica.

$$-z_1 = -\left(1 - \sqrt{3}\,i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$|-z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \ \theta = \frac{2\pi}{3} \qquad -z_1 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Para que $-z_1$ seja raiz cúbica de z_2, então: $(-z_1)^3 = z_2$

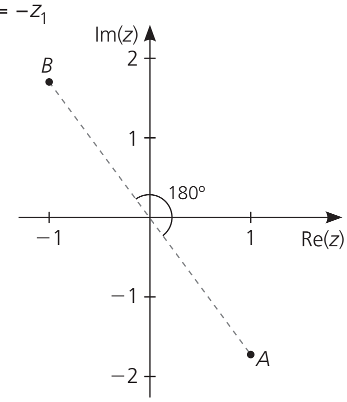
$$(-z_1)^3 = \left[2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$$

Assim, podemos então concluir que: $(-z_1)^3 = z_2$

9.2 Vamos determinar: $z_3 = z_1 \cdot i^{46}$

$$z_3 = z_1 \cdot i^{46} = z_1 \cdot i^{44} \cdot i^2 = z_1 \cdot \left(i^4\right)^{11} \cdot i^2 = z_1 \cdot 1^{11} \cdot i^2 = z_1 \cdot i^2 = -z_1$$

Concluímos, então, que z_3 e z_1 são simétricos, logo, os pontos A e B, afixos de z_3 e z_1, respetivamente, são simétricos em relação à origem do referencial, como se pode observar pela figura.



Então, o comprimento do segmento de reta AB será: $\overline{AB} = 2 \times |-z_1| = 2 \times 2 = 4$

10.

10.1 Vamos determinar $\dfrac{\left(\sqrt{3}-2i\right)^2+\left[2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]^3}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$, passando, em primeiro lugar, para a forma algébrica os números complexos que estão na forma trigonométrica.

$$\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3=2^3\operatorname{cis}\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=8\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{8}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{2}i=4+4\sqrt{3}\,i$$

$$\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0-i=-1$$

Assim, vem:

$$\frac{\left(\sqrt{3}-2i\right)^2+\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{3-4\sqrt{3}\,i+4i^2+4+4\sqrt{3}\,i}{-i}=\frac{7-4}{-i}=\frac{3}{-i}=\frac{3\times i}{-i\times i}=3i$$

10.2 Vamos determinar: $z_2=\operatorname{cis}(\pi+\alpha)$

$z_2=\operatorname{cis}(\pi+\alpha)=\cos(\pi+\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha=-\operatorname{cis}\alpha$

Como pretendemos as raízes cúbicas de z_1 e de z_2, temos:

$z_1^3=\operatorname{cis}(3\alpha)$ e $z_2^3=-\operatorname{cis}(3\alpha)$, de onde vem:

$\operatorname{cis}(3\alpha)=-\operatorname{cis}(3\alpha)\Leftrightarrow\operatorname{cis}(3\alpha)+\operatorname{cis}(3\alpha)=0\Leftrightarrow 2\operatorname{cis}(3\alpha)=0\Leftrightarrow\operatorname{cis}(3\alpha)=0$

Então, para $\cos(3\alpha)=0\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ e para $\operatorname{sen}(3\alpha)=0\Leftrightarrow 3\alpha=k\pi$

Podemos, assim, concluir que $\frac{\pi}{2}\neq 0$, logo, z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

11.

11.1 Vamos passar $z_1=1+i$ para a forma trigonométrica.

$$|1+i|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\qquad 1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Então, $z_1^4=\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\operatorname{cis}\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)=4\operatorname{cis}\pi$

$4\operatorname{cis}\pi=4(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)=-4$

Calculemos agora z_2^4.

$z_2^4=\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\operatorname{cis}\left(4\times\frac{3\pi}{4}\right)=4\operatorname{cis}(3\pi)=4\operatorname{cis}\pi$

$4\operatorname{cis}\pi=4(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)=-4$

Podemos, então, concluir que z_1 e z_2 são ambos raízes quartas do número -4.

11.2 Da alínea anterior, verificamos que os comprimentos dos lados $[AO]$ e $[BO]$ do triângulo medem: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$

Como $\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, então, o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O.

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2\Leftrightarrow\overline{AB}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow\overline{AB}^2=2+2\Leftrightarrow\overline{AB}=\sqrt{4}\Leftrightarrow\overline{AB}=2$$

Então, o perímetro do triângulo $[AOB]$ será: $\overline{AB}+\overline{AO}+\overline{BO}=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$

12.

12.1 Vamos determinar $w = \dfrac{z_1^4 + 4i}{i}$, calculando z_1^4 na forma algébrica.

$$z_1^4 = \left[\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \text{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4\ \text{cis}\ \pi$$

$$4\ \text{cis}\ \pi = 4\left(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi\right) = -4$$

Assim, vem:

$$w = \frac{z_1^4 + 4i}{i} = \frac{-4 + 4i}{i} = \frac{\left(-4 + 4i\right) \times i}{i \times i} = \frac{-4i + 4i^2}{i^2} = \frac{-4i - 4}{-1} = 4 + 4i$$

Na forma trigonométrica, vem:

$$|w| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \qquad w = 4\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

12.2 Determinemos z_1 na forma algébrica.

$$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} i = 1 + i$$

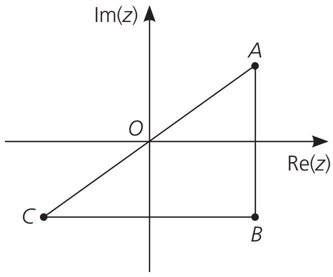
Consideremos A e B as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2, assim, as coordenadas dos seus afixos serão, respetivamente, $A(1, 1)$ e $B(3, 0)$.

Então, o raio da circunferência pedida será: $r = d_{\overline{AB}} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$

Logo, a condição pedida será: $|z - z_2| = r \Leftrightarrow |z - 3| = \sqrt{5}$

13.

A imagem geométrica do número complexo w é o ponto A, que pertence ao 1.º quadrante, logo, a imagem geométrica de $\overline{w}$, B, será simétrica do ponto A em relação ao eixo das abcissas, pertencendo, então, ao 4.º quadrante, e a imagem geométrica de $-w$ será simétrica do ponto A em relação à origem do referencial, pertencendo ao 3.º quadrante, conforme se pode observar na figura seguinte.



Sabemos que $|w| = 5$, então, $|w| = |\overline{w}| = |-w| = 5$, então, vem $\overline{AC} = 2 \times 5 = 10$. Como $\overline{BC} = 8$, temos, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 10^2 = \overline{AB}^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$$

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ será:

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

14.

14.1 Como $z = \text{cis}\,\alpha$, então, $\bar{z} = \text{cis}(-\alpha)$. Sabemos que $[AOBC]$ é um paralelogramo, logo, aplicando a regra do paralelogramo vem: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$

Como a imagem geométrica do número complexo w é o ponto C, então, $w = z + \bar{z}$. Assim, vem:

$w = z + \bar{z} = \text{cis}\,\alpha + \text{cis}(-\alpha) = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha) = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha =$

$= \cos\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha$

14.2 Vamos determinar $\frac{z^3}{i}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\frac{z^3}{i} = \frac{(\text{cis}\,\alpha)^3}{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\text{cis}(3\alpha)}{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \text{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Para que $\frac{z^3}{i}$ seja um número real, então, é necessário que:

$$\text{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a solução pedida será: $\alpha = \frac{\pi}{6}$

15.

15.1 Vamos determinar: $\frac{z_1^3 + 2}{i}$

$$\frac{z_1^3 + 2}{i} = \frac{\left[2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 + 2}{i} = \frac{2^3\,\text{cis}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) + 2}{i} = \frac{8\,\text{cis}\,\pi + 2}{i} = \frac{8 \times (-1) + 2}{i} = \frac{-8 + 2}{i} = \frac{-6}{i} =$$

$$= \frac{-6 \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{6i}{-i^2} = \frac{6i}{1} = 6i$$

Como a parte real do número complexo $\frac{z_1^3 + 2}{i} = 6i$ é $\text{Re}\left(\frac{z_1^3 + 2}{i}\right) = 0$, então, é um imaginário puro.

15.2 A região sombreada da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio $r = |z_1| = 2$ é dada por $|z| < 2$.

Como o polígono inscrito na circunferência é um pentágono regular com centro na origem do referencial, então, o arco definido por dois vértices consecutivos tem amplitude $\frac{2\pi}{5}$.

Assim, a região sombreada é definida pelas semirretas $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ e $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{15}$

Logo, uma condição que define a região sombreada será:

$$|z| < 2 \wedge \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{11\pi}{15}$$

16.

16.1 Vamos passar o número complexo $w = 1 + \sqrt{3}\,i$ para a forma trigonométrica.

$$|w| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$w = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Aplicando a Fórmula de Moivre da radiciação, vem:

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\,\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

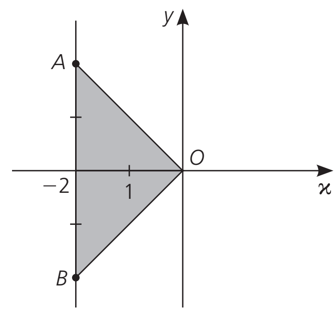
$$k = 0 \rightarrow w_0 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$k = 1 \rightarrow w_1 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

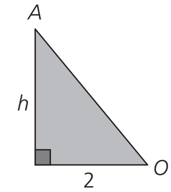
$$k = 2 \rightarrow w_2 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \times 2 \times \pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$k = 3 \rightarrow w_3 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \times 3 \times \pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

16.2 A representação do triângulo $[AOB]$ no plano complexo, de acordo com as condições do enunciado, será:



Como pretendemos determinar o número complexo z na forma algébrica, a partir da área do triângulo $[AOB]$, vamos então considerar o triângulo seguinte:



Assim, vem: $A_\Delta = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \times h}{2} = 4 \Leftrightarrow 2h = 4 \times 2 \Leftrightarrow 2h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{2} \Leftrightarrow h = 4$

Logo, o número complexo z na forma algébrica, será: $z = -2 + 4i$

17.

17.1 Consideremos: $P(x) = x^2 + bx + c$

Como z_1 é raiz de $P(x)$, então: $P(z_1) = 0 + 0i$

$P(z_1) = 0 + 0i \Leftrightarrow z_1^2 + b \cdot z_1 + c = 0 + 0i \Leftrightarrow (1 + i)^2 + b \cdot (1 + i) + c = 0 + 0i \Leftrightarrow 1 + 2i + i^2 + b + bi + c = 0 + 0i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2i - 1 + b + bi + c = 0 + 0i \Leftrightarrow b + c + 2i + bi = 0 + 0i \Leftrightarrow (b + c) + (2 + b)i = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + c = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

Assim, os números reais para os quais z_1 é raiz do polinómio dado são $b = -2$ e $c = 2$.

17.2 Vamos determinar $z_1 = 1 + i$ na forma trigonométrica.

$$|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Determinemos agora: $z_1 \times \overline{z_2}$

$$z_1 \times \overline{z_2} = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{cis}(-\alpha) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]$$

Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um número real negativo, vem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) < 0 \wedge \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \alpha < \frac{3\pi}{2} \wedge \frac{\pi}{4} - \alpha = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < -\alpha < \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \wedge -\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < -\alpha < \frac{5\pi}{4} \wedge -\alpha = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} - 2\pi$$

Assim, $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

18.

18.1 Vamos determinar: $w = \frac{-1+i}{i}$

$$w = \frac{-1+i}{i} = \frac{(-1+i)\times(-i)}{i\times(-i)} = \frac{i - i^2}{-i^2} = \frac{i+1}{1} = 1 + i$$

Representemos w na forma trigonométrica:

$$|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$w = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Verificamos que $w \neq z_1$ porque $\arg(w) \neq \arg(z_1)$ e $w \neq z_2$ porque $|w| \neq |z_2|$.

18.2 Seja $z_1 = \rho\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 4\,\operatorname{cis}\theta$, com θ pertencente ao 2.º quadrante.

Sabemos que z_1 e z_2 são raízes quartas do mesmo número complexo z, logo:

$$z_1^4 = z_2^4 \Leftrightarrow \left[\rho\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 = (4\,\operatorname{cis}\theta)^4 \Leftrightarrow \rho^4\,\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4^4\,\operatorname{cis}(4\theta)$$

$$4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad (\theta \in 2.\text{º quadrante})$$

Assim,

$$z_2 = 4\,\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i = -2\sqrt{3} + 2i$$

19.

19.1 Vamos determinar: $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$$w = \frac{(1 + 2i) \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{(1 + 2i) \times i^{3} - b}{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{(1 + 2i) \times (-i) - b}{-1 - i} = \frac{(-i - 2i^2 - b) \times (-1 + i)}{(-1 - i) \times (-1 + i)} =$$

$$= \frac{(-i - 2 - b) \times (-1 + i)}{1 - i^2} = \frac{i - 2 + b - i^2 + 2i - bi}{1 + 1} = \frac{-1 + b + (3 - b)i}{2} = \frac{-1 + b}{2} + \frac{3 - b}{2}i$$

Como w tem de ser um número real, então, vem:

$$\frac{3 - b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 - b = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

19.2 Consideremos: $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$

Como $|z| = 1$, então, $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

Assim, tem-se:

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = |1 + a + bi|^2 + |1 - a - bi|^2 = \left(\sqrt{(1 + a)^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1 - a)^2 + (-b)^2}\right) =$$

$$= 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2(a^2 + b^2) = 2 + 2 \times 1 = 4$$

$$= 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2(a^2 + b^2) = 2 + 2 \times 1 = 4$$

O Projeto **Desafios** de Matemática
destinado ao 12.º ano de escolaridade,
do Ensino Secundário, é uma obra coletiva,
concebida e criada pelo Departamento de Investigações
e Edições Educativas da Santillana-Constância,
sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

EQUIPA TÉCNICA
Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto
Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião
Ilustração da Capa: Sérgio Veterano
Ilustrações: Ana Mesquita
Paginação: Exemplarr e Sérgio Pires
Documentalista: Paulo Ferreira
Revisão: Ana Abranches, Catarina Pereira e Luís Alho

EDITORA
Alexandra Azevedo Isaías

CONSULTOR CIENTÍFICO
Manuel Almeida Silva — Doutor em Matemática pela Universidade
Nova de Lisboa, onde atualmente é Professor Auxiliar no Departamento
de Matemática.

SANTILLANA
CONSTÂNCIA

Rua Mário Castelhano, 40 – Queluz de Baixo
2734-502 Barcarena, Portugal

APOIO AO PROFESSOR
Tel.: 214 246 901
apoioaoprofessor@santillana.com

APOIO AO LIVREIRO
Tel.: 214 246 906
apoioaolivreiro@santillana.com

Internet: www.santillana.pt

Impressão e Acabamento: Printer Portuguesa

ISBN: 978-989-708-183-5
C. Produto: 512 010 201

1.ª Edição
5.ª Tiragem

Depósito Legal: 347182/12