Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

O teste inclui um formulário e uma tabela trigonométrica.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria

Áreas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone: $\dfrac{Área\ da\ base \times Altura}{3}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Proposta de Resolução [maio]

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Seja x o número de quilómetros percorridos pelos pneus do tipo D.
A média é dada por:

$$\frac{40\,185+45\,200+43\,528+39\,857+x+38\,726}{6}=\frac{207\,496+x}{6}$$

Sabe-se que:

$$\frac{207\,496+x}{6}>41250 \quad \wedge \quad \frac{207\,496+x}{6}<41255$$

$$\Leftrightarrow 207\,496+x>247\,500 \quad \wedge \quad 207\,496+x<247\,530$$

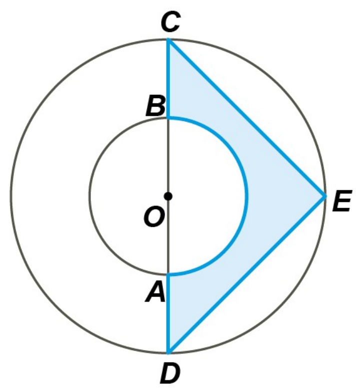
$$\Leftrightarrow x>40\,004 \quad \wedge \quad x<40\,034$$

Resposta: A distância percorrida pelos pneus do tipo D foi superior a 40 004 km e inferior a 40 034 km.

2. O triângulo [*CDE*] é retângulo em *E*.

$\overline{CD}=8$ cm

Seja $\overline{CE}=x$.



$x^2+x^2=8^2 \Leftrightarrow 2x^2=64 \Leftrightarrow x^2=32$.

Daqui resulta que $x=\sqrt{32}$.

$\overline{EC}=\overline{ED}=\sqrt{32}$

O comprimento do arco *AB* é igual a metade do comprimento da circunferência de raio 2, ou seja,

$$\frac{2\pi r}{2}=\pi r=2\pi$$

. O comprimento do arco *AB* é igual a 2π.

. $\overline{BC}=\overline{AD}=4-2=2$

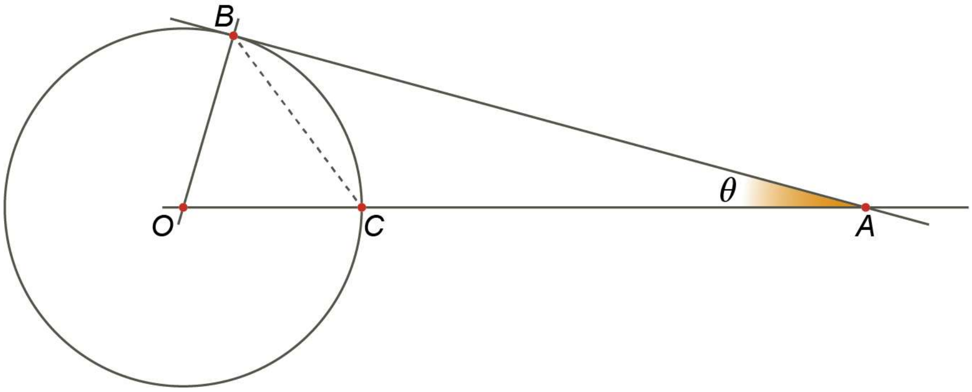
O perímetro, em cm, da região sombreada é dado por: $2+2\pi+2+\sqrt{32}+\sqrt{32}$

Simplificando, tem-se: $4+2\pi+2\sqrt{32}\approx 21{,}59689$

O valor arredondado às centésimas é $21{,}60$ cm.

Resposta: Perímetro da região sombreada é $21{,}60$ cm.

3.1.



O triângulo [*ABO*] é retângulo em *B*.

$\sin\theta = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, ou seja, $\overline{OA} = \dfrac{4}{\sin 22^\circ}$.

$\overline{AC} = \overline{OA} - 4$, ou seja, $\overline{AC} = \dfrac{4}{\sin 22^\circ} - 4$

$\overline{AC} \approx 6{,}7$

Resposta: O valor de $\overline{AC}$, arredondado às décimas, é 6,7.

3.2.

$\overset{\frown}{CB} = C\hat{O}B = \dfrac{360}{5} = 72$

$\theta + 72 + 90 = 180 \Leftrightarrow \theta = 18$

$\theta = 18^\circ$

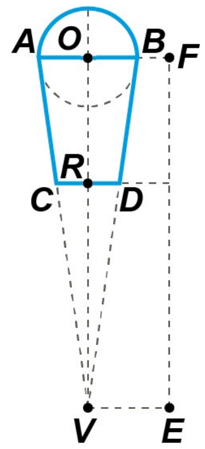
Resposta: Opção correta é: **(B)** 18°

4. Sendo *f* uma função de proporcionalidade inversa, tem-se: $b \times \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2} \times 6$.

$b \times \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2} \times 6 \Leftrightarrow b^2 = 6$. Como $b > 0$, conclui-se que $b = \sqrt{6}$.

Resposta: Opção correta é: **(D)** $\sqrt{6}$

5.



$\overline{OB} = \frac{7,8}{2} = 3,9$

$\overline{RD} = \frac{5,2}{2} = 2,6$

Os triângulos [*VRD*] e [*VOB*] são semelhantes.
Então, tem-se:

$\frac{\overline{OB}}{\overline{RD}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VR}}$, ou seja, $\frac{3,9}{2,6} = \frac{27}{\overline{VR}}$.

Daqui resulta que: $\overline{VR} = \frac{2,6 \times 27}{3,9} = 18$

. Seja V_1 o volume do cone em que [*CD*] é diâmetro da base e a altura é $\overline{VR} = 18$ cm:

$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 18 = 6\pi \times 2,6^2 = 40,56\pi$.

$V_1 = 40,56\pi$ cm^3

. Seja V_2 o volume do cone em que [*AB*] é diâmetro da base e a altura é $\overline{VO} = 27$ cm:

$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 27 = 9\pi \times 3,9^2 = 136,89\pi$.

$V_2 = 136,89\pi$ cm^3

. Seja V_3 o volume da semiesfera de diâmetro [*AB*].

$V_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi \times 3,9^3 = 30,42\pi$

Seja *V* o volume total do sólido que representa o copo.
$V = (V_2 - V_1) + V_3 = 96,33\pi + 30,42\pi = 126,75\pi$
Capacidade do copo: $126,75\pi$ ml $= 12,675\pi$ cl ≈ 40 cl

Resposta: Capacidade do copo, em cl, arredondada às unidades é 40.

FIM (Caderno 1)

Item						
Cotações (em pontos)						
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.**	**Total**
10	10	10	5	5	10	**50**

Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6. O número 20^7, em notação científica, tem a seguinte representação: $1{,}28\times10^9$.

Sabe-se que $20^8=k\times10^9$, com $k\in\left]a,b\right[$, sendo a e b números inteiros consecutivos.
Vamos determinar os valores de *a* e de *b*.

$20^8=20\times20^7=20\times\left(1{,}28\times10^9\right)=\left(20\times1{,}28\right)\times10^9=25{,}6\times10^9$

Se $20^8=k\times10^9$, então $k=25{,}6$.

$k\in\left]25,26\right[$

Resposta: $a=25$ e $b=26$

7. $1-\dfrac{x}{2}<3\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$

$1-\dfrac{x}{2}<3\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\Leftrightarrow1-\dfrac{x}{2}<3x-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow4-2x<12x-3\Leftrightarrow14x>7\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Resposta: $x\in\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

8.1. Se $x=3$:

$P\left(3,f\left(3\right)\right)$.

$f\left(3\right)=2\times3^2=18$

$P\left(3,18\right)$. Daqui resulta que $C\left(3+18,18\right)$, ou seja, $C\left(21,18\right)$.

Resposta: A opção correta é **(C)** $\left(21,18\right)$.

8.2. Expressão da área do quadrado: $\left(2x^2\right)^2$, ou seja, $4x^4$

Expressão da área do triângulo: $\dfrac{2x\times2x^2}{2}$, ou seja, $2x^3$.

Como $4x^4+2x^3=2x^3\left(2x+1\right)$, a opção correta é a (A).

Resposta: Opção correta **(A)** $2x^3\left(2x+1\right)$

8.3. $B\left(x+2x^2,0\right)$

$x+2x^2=10 \Leftrightarrow 2x^2+x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4} \Leftrightarrow x=2 \vee x=-\dfrac{5}{2}$.

Como $x>0$, tem-se $x=2$.

Se $x=2$, então $P\left(2,f\left(2\right)\right)$, ou seja, $P\left(2,8\right)$.

Resposta: $P\left(2,8\right)$

9. Coordenadas do ponto *A*

$A\left(4,f\left(4\right)\right)$.

$f\left(4\right)=\dfrac{4^2}{2}=8$

$A\left(4,8\right)$.

A função *g* é definida por uma expressão do tipo $g\left(x\right)=\dfrac{k}{x}$.

O ponto *A* pertence ao gráfico de *g*, então $g\left(4\right)=8$, ou seja, $\dfrac{k}{4}=8$. Daqui resulta que $k=32$.

Assim, $g\left(x\right)=\dfrac{32}{x}$.

$g\left(6\right)=\dfrac{32}{6}=\dfrac{16}{3}$

Resposta: Opção correta **(B)** $\dfrac{16}{3}$

10.1. A razão da redução é $\dfrac{1}{2}$. Então, a razão entre os volumes é igual a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, ou seja, $\dfrac{1}{8}$.

Assim, o volume do cilindro passa de $800\ \text{cm}^3$ para $100\ \text{cm}^3$.

Resposta: Opção correta é **(A)** 100

10.2. A reta *AB* é paralela ao plano *HIJ* (que contém a base do prisma).
No entanto a reta *AB* não é paralela à reta *IJ* do plano *HIJ*.

FIM (Caderno 2)

Item								
Cotações (em pontos)								
6.	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**Total**
6	8	5	5	10	5	5	6	**50**