Nome do aluno | Nº | Data / / 20

AVALIAR CONHECIMENTOS - SOLUÇÕES

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D

Tem-se $2x + z + d = 0$. Como $P(1, 3, 4)$ pertence ao plano, conclui-se que:

$$2 \times 1 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$$

Portanto, a condição que define o plano é $2x + z = 6$.

2. A

$-(-1) + 3 \times 3 + k = 4 \Leftrightarrow k = -6$

3. A

Pelo teorema de Pitágoras, obtém-se $\overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$, logo, as coordenadas de B, C e F são, respetivamente, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, -2)$.

Seja $\vec{u}$ um vetor perpendicular a $\overrightarrow{BC}(-2, 2, 0)$ e $\overrightarrow{BF}(-2, 0, -2)$, vetores normais ao plano BCF.

Então, o vetor $\vec{u}(a, b, c)$ é tal que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \wedge \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ -2a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -c \end{cases}$$

Fazendo $a = 1$, tem-se $b = 1$ e $c = -1$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano, tem coordenadas $(1, 1, -1)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano BCF é $x + y - z + d = 0$.

Como B pertence ao plano, tem-se $2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.

Portanto, uma equação do plano é dada por $x + y - z = 2$.

4. A

Pode-se afirmar pela equação da reta r que esta contém a aresta $[PT]$.

Logo, a interseção da reta r com o plano OUV é o ponto P.

5. A

Tem-se $\vec{u}_\alpha(1, 1, -1)$ perpendicular a α e $\vec{u}_\beta(2, 2, -2)$ perpendicular a β.
Estes vetores são colineares, pelo que os dois planos são paralelos.
Como as duas equações não são equivalentes, os planos não são coincidentes.
Portanto, são estritamente paralelos.

6. B

O ponto H pertence ao plano DBH; logo, tem cota igual a zero e abcissa igual à ordenada.

Portanto, $x + x = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Logo, $H(5, 5, 0)$ e a medida da aresta do cubo é 10 u. c.

7. C

Considere-se o vetor $\overrightarrow{MV}(3, 1, -1)$, perpendicular ao plano ABC.

Assim, uma equação cartesiana do plano é $3x + y - z + d = 0$.

Como M pertence ao plano, tem-se:

$$3 \times (-1) + 1 \times 2 - 1 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

Logo, uma equação cartesiana do plano é dada por $3x + y - z + 6 = 0$.

8. D

Substituindo as coordenadas do ponto A nas quatro hipóteses de equações, obtêm-se como verdadeiras as opções (B) e (D).

Se $C(0, 0, 0)$, tem-se que $\overrightarrow{AC}(1, -1, -2)$ e $\overrightarrow{AC}$ não é colinear a $(1, -2, 3)$.

Se $C(-2, 3, -1)$, tem-se que $\overrightarrow{AC}(-1, 2, -3)$ e $\overrightarrow{AC}$ é colinear a $(1, -2, 3)$.

9. A

Os vetores $\vec{s}(1, 1, 2)$ e $\vec{t}(-1, 0, 2)$ são paralelos ao plano α.
Então, um vetor $\vec{u}$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano α.
Logo, o vetor $\vec{u}(a, b, c)$ é tal que $\vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \wedge \vec{u} \cdot \vec{t} = 0$:

$$\begin{cases}(a, b, c) \cdot (1, 1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 0, 2) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b + 2c = 0 \\ -a + 2c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = -4c \\ a = 2c\end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, tem-se $a = 2$ e $b = -4$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano α, tem coordenadas $(2, -4, 1)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano α é $2x - 4y + z + d = 0$.

Como $(1, 2, 3)$ pertence ao plano, tem-se:

$$2 \times 1 - 4 \times 2 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$$

Portanto, uma equação cartesiana do plano α é dada por:

$$2x - 4y + z + 3 = 0$$

10. A

Sejam $\vec{u}(1, -1, 1)$ vetor normal ao plano α e $\vec{v}(1, 1, -2)$ vetor diretor da reta r.

Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}) = \frac{1 - 1 - 2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como $(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}) \approx 118{,}1°$, tem-se que $\hat{a} \approx 180 - 90 - 118{,}1° = 28{,}1°$.

RESPOSTA ABERTA

11.

11.1. $B(0, 2, 0)$

Tem-se que $A(3, 0, 0)$ e $B(0, y, 0)$, então:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13} \Leftrightarrow \|(-3, y, 0)\| = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{9 + y^2} = \sqrt{13} \underset{9 + y^2 \geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 9 + y^2 = 13 \underset{y > 0}{\Leftrightarrow} y = 2$$

11.2. 44,3º

$\overrightarrow{CA} = A - C$ tem coordenadas $(3, 0, -4)$ e $\overrightarrow{CB} = B - C$ tem coordenadas $(0, 2, -4)$.

Logo:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\| \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) = \frac{16}{5 \times 2\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) = \frac{8\sqrt{5}}{25} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB} \approx 44{,}3°$$

11.3. $4x + 6y + 3z - 12 = 0$

Os dois vetores $\overrightarrow{CA}(3, 0, -4)$ e $\overrightarrow{CB}(0, 2, -4)$ são paralelos ao plano ABC.
Então, um vetor $\vec{u}$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano ABC.
Logo, o vetor $\vec{u}(a, b, c)$ é tal que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \wedge \vec{u} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$:

$$\begin{cases}(a, b, c) \cdot (3, 0, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 2, -4) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a - 4c = 0 \\ 2b - 4c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \frac{4}{3}c \\ b = 2c\end{cases}$$

Fazendo $c = 3$, tem-se $a = 4$ e $b = 6$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano ABC, tem coordenadas $(4, 6, 3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABC é $4x + 6y + 3z + d = 0$.

Como $A(3, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se $4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABC é dada por:

$$4x + 6y + 3z - 12 = 0$$

12.

12.1. $A(3,0,0), B(0,4,0), C(0,0,-5)$

Tem-se que $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$ e $C(0, 0, z)$, pois pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente. Então, substituindo na equação do plano α, obtém-se:

$$20x = 60 \Leftrightarrow x = 3$$
$$15y = 60 \Leftrightarrow y = 4$$
$$-12z = 60 \Leftrightarrow z = -5$$

12.2. Triângulo acutângulo

Como $\overrightarrow{AB}(-3, 4, 0)$, $\overrightarrow{AC}(-3, 0, -5)$ e $\overrightarrow{BC}(0, -4, -5)$, então:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

Aplicando o teorema de Carnot, obtêm-se os ângulos internos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ do triângulo ABC:

$$\sqrt{41}^2 = 5^2 + \sqrt{34}^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{34}\cos\widehat{A} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41 = 59 - 10\sqrt{34}\cos\widehat{A} \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{59-41}{10\sqrt{34}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{9\sqrt{34}}{170} \Leftrightarrow \widehat{A} \backsimeq 72°$$

$$\sqrt{34}^2 = 5^2 + \sqrt{41}^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{41}\cos\widehat{B} \Leftrightarrow \cos\widehat{B} = \frac{66-34}{10\sqrt{41}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B} = \frac{16\sqrt{41}}{205} \Leftrightarrow \widehat{B} \backsimeq 89°$$

Logo, $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} \backsimeq 19°$.

12.3. $3x - 4y + 16 = 0$

Seja $\overrightarrow{BA}(3, -4, 0)$, por exemplo, um vetor normal ao plano perpendicular a α.

Uma equação cartesiana do plano é $3x - 4y + d = 0$.

Como α contém o ponto $B(0, 4, 0)$, tem-se $d = 16$.

Logo, uma equação cartesiana do plano perpendicular a α é dada por:

$$3x - 4y + 16 = 0$$

13.

13.1. -21

$\overrightarrow{BG} = G - B$ tem coordenadas $(0-4, 3-0, -2-0) = (-4, 3, -2)$.

$\overrightarrow{AD} = D - A$ tem coordenadas $(4-0, 0-3, -2-0) = (4, -3, -2)$.

$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \times 4 + 3 \times (-3) + (-2) \times (-2) = -21$

13.2. $2y + 3z = 0$

Os vetores $\overrightarrow{BO}(-4, 0, 0)$ e $\overrightarrow{BF}(0, 3, -2)$ são paralelos ao plano OBF.

Então, um vetor $\vec{u}$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano OBF.

Logo, o vetor $\vec{u}(a, b, c)$ é tal que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BO} = 0 \wedge \vec{u} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$.

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(-4,0,0) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(0,3,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 0 \\ 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

Fazendo $c = 3$, tem-se $b = 2$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano OBF, tem coordenadas $(0, 2, 3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano OBF é $2y + 3z + d = 0$.

Como $O(0, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se $d = 0$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano OBF é dada por:

$$2y + 3z = 0$$

13.3. $p = \frac{19}{22}$

Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então, $M\left(2, \frac{3}{2}, 0\right)$.

Sabe-se que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ou seja:

$$\left(2p - 2, -p + 2 - \frac{3}{2}, 4\right) \cdot (4, -3, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8p - 8 + 3p - 6 + \frac{9}{2} + 0 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{19}{22}$$

Em alternativa:

Plano mediador de $[AB]$:

$d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 6y - 7 = 0$

Como o ponto $P(2p, -p + 2, 4)$ pertence ao plano mediador $[AB]$:

$8(2p) - 6(-p + 2) - 7 = 0 \Leftrightarrow 16p + 6p = 7 + 12 \Leftrightarrow p = \frac{19}{22}$

14.

14.1.

Como os vetores $\vec{u}_r(1, -1, 2)$ e $\vec{u}_s(3, -1, 0)$ são não colineares e as retas r e s se intersetam no ponto $(1, 2, 3)$, então, as retas definem um plano, pois são concorrentes.

Uma equação vetorial desse plano é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + a(1, -1, 2) + b(3, -1, 0), a, b \in \mathbb{R}$$

14.2. $\begin{cases} x = k \\ y = 3k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$

Dados dois vetores $\vec{u}_r(1, -1, 2)$ e $\vec{u}_s(3, -1, 0)$, paralelos ao plano que contém r e s, obtém-se um vetor $\vec{v}$ perpendicular a estes vetores que é normal ao plano.

Logo, o vetor $\vec{v}(a, b, c)$ é tal que $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = 0 \wedge \vec{v} \cdot \vec{u}_s = 0$:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, -1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 3a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2c = 0 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 3a \end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, tem-se $a = 1$ e $b = 3$. Então, um vetor $\vec{v}$, normal ao plano, tem coordenadas $(1, 3, 1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta pedida é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 3, 1), k \in \mathbb{R}$$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta perpendicular a s e que passa pela origem do referencial pode ser dado por:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 3k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

14.3. $I(3, 0, 7)$

Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano xOz.

Então, $I(x, 0, z) \in r$, ou seja:

$$(x, 0, z) = (1, 2, 3) + k(1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Logo:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ 0 = 2 - k \\ z = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = 2 \\ z = 7 \end{cases}$$

15.

15.1. $x^2+y^2+z^2=100$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{0+(8-0)^2+(6-0)^2} = \sqrt{100} = 10$

15.2. $3x+5z-30=0$

As coordenadas de D são $(10, 0, 0)$, pois pertence ao semieixo positivo das abcissas.

Os vetores $\overrightarrow{AB}(0, -16, 0)$ e $\overrightarrow{AD}(10, -8, -6)$ são paralelos ao plano ABD. Então, um vetor $\vec{u}$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano.

Logo, o vetor $\vec{u}(a, b, c)$ é tal que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \wedge \vec{u}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,-16,0)=0\\(a,b,c)\cdot(10,-8,-6)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-16b=0\\10a-8b-6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\a=\dfrac{3}{5}c\end{cases}$$

Fazendo $c=5$, tem-se $a=3$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano, tem coordenadas $(3, 0, 5)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABD é $3x+5z+d=0$.

Como $D(10, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se:

$$3\times 10+d=0 \Leftrightarrow d=-30$$

Portanto, pode-se, por exemplo, definir o plano ABD por $3x+5z-30=0$.

15.3. $\sin\hat{C}=\frac{4}{5}$

As coordenadas de C são $(0, 0, -10)$, pois pertence ao semieixo negativo das cotas.

Como $\overrightarrow{AB}(0, -16, 0)$, $\overrightarrow{AC}(0, -8, -16)$ e $\overrightarrow{BC}(0, 8, -16)$, então:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-16)^2} = 16$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-8)^2+(-16)^2} = \sqrt{320}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{8^2+(-16)^2} = \sqrt{320}$$

Aplicando o teorema de Carnot, obtém-se:

$$16^2 = \sqrt{320}^2+\sqrt{320}^2-2\times\sqrt{320}\times\sqrt{320}\cos\widehat{C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 256 = 640-640\cos\widehat{C} \Leftrightarrow \cos\widehat{C}=\frac{640-256}{640} \Leftrightarrow \cos\widehat{C}=\frac{3}{5}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria, tem-se:

$$\sin^2\widehat{C}+\cos^2\widehat{C}=1 \Leftrightarrow \sin^2\widehat{C}=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2\widehat{C}=\frac{16}{25} \underset{\sin\widehat{C}>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \sin\widehat{C}=\sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sin\widehat{C}=\frac{4}{5}$$

15.4. Por exemplo, $(x,y,z)=(0,-8,6)+a(1,0,0)+b(0,3,4), a,b\in\mathbb{R}$

Seja α o plano tangente à superfície esférica no ponto B. Então, o vetor $\overrightarrow{BO}(0, 8, -6)$ é um vetor normal a α. Considerem-se dois vetores, não colineares entre si, perpendiculares a $\overrightarrow{BO}$, de coordenadas, por exemplo, $(1, 0, 0)$ e $(0, 3, 4)$. Como estes dois vetores são paralelos a α e o ponto B pertence a α, tem-se que uma equação vetorial de α é, por exemplo:

$$(x, y, z) = (0, -8, 6) + a(1, 0, 0) + b(0, 3, 4),\ a, b \in \mathbb{R}$$

16.

16.1. $24\sqrt{3}$ u.v.

Considere-se a pirâmide quadrangular $[ABCDV]$.

Como V pertence ao eixo Oz, tem abcissa e ordenada nula; e como pertence ao plano ABV, tem-se:

$$-\sqrt{3}\times 0+3z=3\sqrt{3} \Leftrightarrow z=\sqrt{3}$$

Então, $V(0, 0, \sqrt{3})$ e a altura da pirâmide $[ABCDV]$ é de $\sqrt{3}$ u. c.

Seja E o ponto médio de $[DC]$.

Então:

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{\overline{OE}} \Leftrightarrow \overline{OE} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$$

Logo, a aresta do quadrado $[ABCD]$ tem de comprimento 6 u. c.

Portanto:

$$V_{\text{octaedro}} = 2V_{[ABCDV]} = 2 \times \frac{6^2 \times \sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3} \text{ u. v.}$$

16.2. $UDC: y - \sqrt{3}z - 3 = 0$

Tem-se que $C(-3, 3, 0)$, $D(3, 3, 0)$ e $U(0, 0, -\sqrt{3})$.

Os vetores $\overrightarrow{DC}(-6, 0, 0)$ e $\overrightarrow{DU}(-3, -3, -\sqrt{3})$ são paralelos ao plano UDC. Então, um vetor $\vec{u}(a, b, c)$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano.

Logo:

$$\begin{cases}(a, b, c) \cdot (-6, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, -3, -\sqrt{3}) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6a = 0 \\ -3a - 3b - \sqrt{3}c = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = 0 \\ c = -\sqrt{3}b\end{cases}$$

Fazendo $b = 1$, tem-se $c = -\sqrt{3}$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano, tem coordenadas $(0, 1, -\sqrt{3})$.

Assim, uma equação cartesiana do plano UDC é:

$$y - \sqrt{3}z + d = 0$$

Como $U(0, 0, -\sqrt{3})$ pertence ao plano, tem-se $d = -3$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano UDC é dada por:

$$y - \sqrt{3}z - 3 = 0$$

Os planos UDC e ABV são paralelos porque os vetores $(0, 1, -\sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3}, 3)$ são colineares:

$$(0, 1, -\sqrt{3}) = -\sqrt{3}(0, 1, -\sqrt{3}) = (0, -\sqrt{3}, 3)$$

16.3. $\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Uma equação que define a reta r:

$$(x, y, z) = (3, 3, 0) + k(0, -\sqrt{3}, 3), k \in \mathbb{R}$$

Assim, um ponto que pertença a r tem coordenadas da forma $(3, 3 - \sqrt{3}k, 3k)$.

Como o ponto de interseção da reta r com o plano ABV pertence a ambos, tem-se:

$$-\sqrt{3}(3 - \sqrt{3}k) + 3(3k) = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3} + 3k + 9k = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o ponto tem coordenadas:

$$\left(3, 3 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

17.

17.1.

17.1.1. $4x - 6y + 3z - 12 = 0$

Os vetores $\overrightarrow{AB}(-3, -2, 0)$ e $\overrightarrow{AC}(-3, 0, 4)$ são paralelos ao plano ABC.
Então, um vetor $\vec{u}(a, b, c)$ perpendicular a estes vetores é normal ao plano.

Logo:

$$\begin{cases}(a, b, c)\cdot(-3, -2, 0) = 0\\(a, b, c)\cdot(-3, 0, 4) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a - 2b = 0\\-3a + 4c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = -\dfrac{3}{2}a\\[2ex] c = \dfrac{3}{4}a\end{cases}$$

Fazendo $a = 4$, tem-se $b = -6$ e $c = 3$. Então, um vetor $\vec{u}$, normal ao plano, tem coordenadas $(4, -6, 3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABC é $4x - 6y + 3z + d = 0$.

Como $A(3, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se $d = -12$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABC é dada por:

$$4x - 6y + 3z - 12 = 0$$

17.1.2. $3x + y - 9 = 0$

O vetor $\overrightarrow{BA}(3, 2, 0)$ é normal ao plano α tangente à superfície esférica no ponto A. Logo, o plano α pode-se escrever na forma

$$3x + 2y + d = 0$$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$3 \times 3 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

Portanto, uma equação cartesiana do plano α pode ser dada pela equação $3x + y - 9 = 0$.

17.1.3. $3x + 2y + 4 = 0$

O vetor $\overrightarrow{BA}(3, 2, 0)$ pertence ao plano ABC; logo, $\overrightarrow{BA}$ é um vetor normal ao plano β perpendicular a ABC.

Logo, o plano β pode-se escrever na forma $3x + 2y + d = 0$.

Como $B(0, -2, 0)$ pertence ao plano β, tem-se:

$$3 \times 0 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$$

Assim, uma equação cartesiana do plano perpendicular a ABC que passa por B pode ser: $3x + 2y + 4 = 0$.

17.2. $D(0, 5\sqrt{3}, 4)$

Pelo enunciado, sabe-se que o ponto D tem coordenadas $(0, y, 4)$, com ordenada positiva.

Como $\overrightarrow{DC}(0, -y, 0)$ e $\overrightarrow{DA}(3, -y, -4)$, então:

$$\|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{(-y)^2} \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y$$

$$\|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{3^2 + (-y)^2 + (-4)^2} = \sqrt{y^2 + 25}$$

Tem-se:

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \times \cos C\widehat{D}A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = y\left(\sqrt{y^2 + 25}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \left(\sqrt{y^2 + 25}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{y>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{75}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}y^2 - \frac{75}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 5\sqrt{3} \underset{y>0}{\Rightarrow} y = 5\sqrt{3}$$

17.3.

É a superfície esférica de centro no ponto médio de $[AB]$ e raio igual a $\dfrac{\overline{AB}}{2}$:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{13}{4}$$

17.4.

Considere-se como base da pirâmide o triângulo $[OAB]$ e como altura $[OC]$:

$$V_{[OABC]} = \frac{A_{[OAB]} \times \overline{OC}}{3} = \frac{\frac{3 \times 2}{2} \times 4}{3} = 4 \text{ u. v.}$$

17.5. $\left(\frac{198}{61}, \frac{8}{61}, -\frac{4}{61}\right)$

Uma equação que define a reta r :

$$(x, y, z) = (2, 2, -1) + k(4, -6, 3), k \in \mathbb{R}$$

Assim, um ponto que pertença a r tem coordenadas da forma:

$$(2 + 4k, 2 - 6k, -1 + 3k)$$

Como o ponto de interseção da reta r com o plano ABC pertence a ambos, tem-se:

$4(2 + 4k) - 6(2 - 6k) + 3(-1 + 3k) - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 + 16k - 12 + 36k - 3 + 9k - 12 = 0 \Leftrightarrow 61k = 19 \Leftrightarrow k = \frac{19}{61}$

Portanto:

$$\begin{cases} x = 2 + 4 \times \frac{19}{61} \\ y = 2 - 6 \times \frac{19}{61} \\ z = -1 + 3 \times \frac{19}{61} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{198}{61} \\ y = \frac{8}{61} \\ z = -\frac{4}{61} \end{cases}$$