Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Elipse

Designa-se por elipse o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano tais que a soma das distâncias de cada um deles a dois pontos fixos do plano – denominados **focos** – é igual a um comprimento constante, maior que a distância entre os focos.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$, a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Representa uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Esta equação designa-se por equação (cartesiana) reduzida da elipse.

1. Determine as coordenadas dos vértices e dos focos de cada uma das elipses definidas, num referencial o.n. xOy, pelas equações:

1.1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

1.2. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

1.3. $4x^2 + 9y^2 = 25$

1.4. $x^2 + 4y^2 = 1$

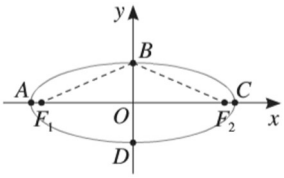
2. Determine a equação cartesiana reduzida da elipse, sabendo que:

2.1. O eixo maior mede 8 e o semieixo menor mede 2;

2.2. O eixo maior mede 10 e passa pelo ponto $A(1, 2)$;

2.3. Tem um foco no ponto $F(2, 0)$ e um vértice em $V(-3, 2)$.

3. Considere num plano munido de um referencial o.n. a elipse de focos nos pontos $F_1(-12, 0)$ e $F_2(12, 0)$ e eixo maior 26.

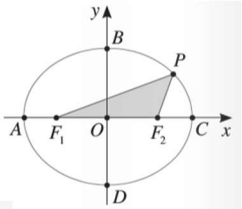


3.1. Justifique que o triângulo $[F_1BF_2]$ é isósceles e determine o seu perímetro.

3.2. Determine as coordenadas de A, B, C e D.

4. O eixo maior de uma elipse mede 26 cm e o eixo menor 10 cm. Determine a distância focal.

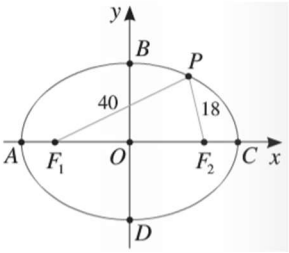
5. No referencial o.n. da figura está representada uma elipse de focos F_1 e F_2, distância focal 30 e eixo maior 50.



5.1. Determine o eixo menor;

5.2. Sabendo que o ponto P pertence à elipse, determine o perímetro do triângulo $[F_1PF_2]$.

6. Relativamente à elipse representada no referencial o.n. ao lado, sabe-se que:

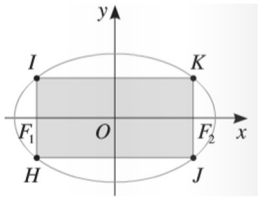


- $B(0, 21)$
- $\overline{F_1P} = 40$
- $\overline{F_2P} = 18$

6.1. Determine a equação reduzida da elipse;

6.2. Calcule os pontos da elipse de abcissa 20.

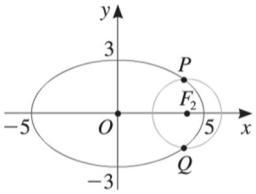
7. No referencial o.n. da figura está representada a elipse de equação $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{4}=1$ e o retângulo $[IKJH]$ de lados paralelos aos eixos, cujos vértices pertencem à elipse e têm, dois a dois, abcissas iguais às dos focos da elipse.
Determine a área do retângulo $[IKJH]$.



8. No referencial da figura estão representadas uma elipse e uma circunferência. Sabe-se que:

- A elipse está centrada na origem e tem eixo maior 10 e eixo menor 6;
- A circunferência tem centro no foco da elipse de abcissa positiva e raio 2;
- P e Q são os pontos de interseção da elipse e da circunferência.

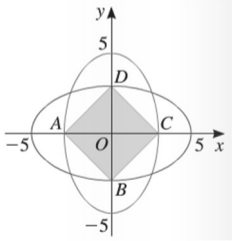
Determine as coordenadas de P e de Q.



9. No referencial o.n. da figura estão representadas duas elipses e um quadrilátero $[ABCD]$ cujos vértices são os focos das duas elipses. Sabe-se, ainda, que a distância focal de uma elipse é igual ao eixo menor da outra elipse.

9.1. Justifique que $[ABCD]$ é um quadrado e calcule a sua área;

9.2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção das duas elipses.



Soluções

1.

1.1. Vértices: $(5,0)$; $(-5,0)$; $(0,3)$; $(0,-3)$; Focos: $(-4,0)$; $(4,0)$

1.2. Vértices: $(2\sqrt{2},0)$; $(-2\sqrt{2},0)$; $(0,\sqrt{2})$; $(0,-\sqrt{2})$; Focos: $(-\sqrt{6},0)$; $(\sqrt{6},0)$

1.3. Vértices: $\left(\frac{5}{2},0\right)$; $\left(-\frac{5}{2},0\right)$; $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$; $\left(0,-\frac{5}{3}\right)$; Focos: $\left(-\frac{5}{6}\sqrt{5},0\right)$; $\left(\frac{5}{6}\sqrt{5},0\right)$

1.4. Vértices: $(1,0)$; $(-1,0)$; $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$; Focos: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$

2.

2.1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

2.2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{6}}=1$

2.3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

3.

3.1. $P=50\ u.c.$

3.2. $A(-13,0); B(0,5); C(13,0); D(0,-5)$

4. $24\ cm$

5.

5.1. $40\ u.c.$

5.2. $P=80\ u.c.$

6.

6.1. $\frac{x^2}{841}+\frac{y^2}{441}=1$

6.2. $\left(20,-\frac{441}{29}\right)$; $\left(20,\frac{441}{29}\right)$

7. $A=\frac{16\sqrt{15}}{5}\ u.a.$

8. $P\left(\frac{15}{4},\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$ e $Q\left(\frac{15}{4},-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$

9.

9.1. $A=25\ u.a$

9.2. $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$