Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Superfície esférica e esfera

1. Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro em:

1.1. $(2, -1, -3)$ e raio 4;

1.2. $(0, 1, -1)$ e que passa por $P(2, -1, 3)$.

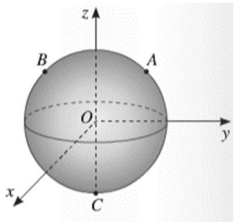
2. Indique o centro e o raio das superfícies esféricas definidas pelas seguintes equações:

2.1. $(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 25$

2.2. $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 8$

2.3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

3. Num referencial ortonormado $Oxyz$ está representada uma superfície esférica de centro na origem e à qual pertencem os pontos A, B e C.



Sabe-se que:

- O ponto C é um ponto de cota negativa do eixo Oz;
- Os pontos A e B têm coordenadas $(0, 4, 3)$ e $(0, -4, 3)$, respetivamente.

3.1. Escreva a equação reduzida da superfície esférica.

3.2. Determine as coordenadas do ponto C.

3.3. Classifique, quanto aos lados, o triângulo $[ABC]$ e determine o seu perímetro.

3.4. Indique as equações dos planos tangentes à superfície esférica e paralelos aos planos coordenados.

4. Determine as coordenadas, num referencial o.n. $Oxyz$, dos pontos de interseção da superfície esférica, de centro $C(-3, 2, 0)$ e raio 5, com o eixo Oy.

5. Considere a superfície esférica definida pela equação

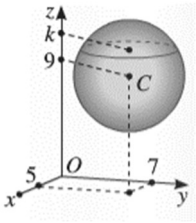
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 10z + 13 = 0$$

5.1. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da superfície esférica.

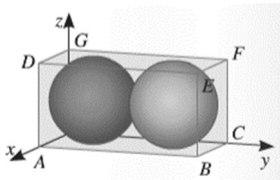
5.2. Averigue se o ponto P de coordenadas $(0, -2, 3)$ pertence à esfera com o mesmo centro e raio da superfície esférica.

6. Indique as coordenadas do centro e o raio de uma esfera em que, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos de equação $z = 1$, $x = 5$, $y = -2$ e $y = 2$ são planos que lhe são tangentes.
Escreva a inequação reduzida que define essa esfera.

7. No referencial ortonormado $Oxyz$ da figura está representada uma esfera de centro $C(5, 7, 9)$ e raio 4.
A interseção da esfera com o plano de equação $z = k$ $(k \in \mathbb{R} \wedge k > 9)$ é um círculo de raio $\sqrt{12}$.
Determine o valor de k e escreva a condição que define esse círculo.



8. No referencial o.n. com origem O, estão representados um prisma reto e duas esferas geometricamente iguais tangentes entre si e tangentes às faces do prisma.
O prisma tem a face $[AOGD]$ contida em xOz, a face $[ABCO]$ em xOy e a face $[BCEF]$ contida no plano de equação $y = 20$.



8.1. Escreva uma inequação que defina a esfera à esquerda na figura.

8.2. A reta definida pelo sistema $y = 15 \wedge z = 10$, interseta uma das superfícies esféricas num ponto. Determine as coordenadas desse ponto.

8.3. Determine o perímetro do círculo que é a interseção da esfera à esquerda na figura com o plano de equação $x = 7$.

Soluções

1.

1.1. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$

1.2. $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=24$

2.

2.1. Centro: $(5,-1,7)$; raio: 5

2.2. Centro: $(3,\frac{3}{2},0)$; raio: $2\sqrt{2}$

2.3. Centro: $(0,0,0)$; raio: 2

3.

3.1. $x^2+y^2+z^2=25$

3.2. $C(0,0,5)$

3.3. O triângulo é isósceles e o seu perímetro é de $8\sqrt{5}+8\ u.c.$

3.4. $yOz: x=5, x=-5$; $xOz: y=5, y=-5$; $xOy: z=5, z=-5$

4. $(0,-2,0)$ e $(0,6,0)$

5.

5.1. Centro: $(0,-2,5)$; raio: 4

5.2. P pertence à esfera

6.

6.1. $(x-3)^2+y^2+(z+1)^2\leq 4$; $(x-7)^2+y^2+(z+1)^2\leq 4$;
$(x-3)^2+y^2+(z-3)^2\leq 4$; $(x-7)^2+y^2+(z-3)^2\leq 4$

7. Condição que define o círculo: $(x-5)^2+(y-7)^2=12\ \wedge z=k$
$k=11$
$(x-5)^2+(y-7)^2\leq 12\ \wedge z=11$

8.

8.1. Esfera da esquerda: $(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2\leq 25$

8.2. Esfera da direita: $(x-5)^2+(y-15)^2+(z-5)^2\leq 25$
Coordenadas do ponto: $(5,15,10)$

8.3. Condição do círculo: $(y-5)^2+(z-5)^2\leq 21\ \wedge x=7$
Perímetro: $2\sqrt{21}\pi\ u.c.$