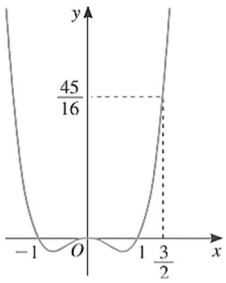
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Funções polinomiais

1. De uma função f, polinomial de 3º grau, sabe-se que o polinómio que a define tem o zero duplo 2 e o zero simples -1. Sabe-se ainda que $f(0) = 4$.

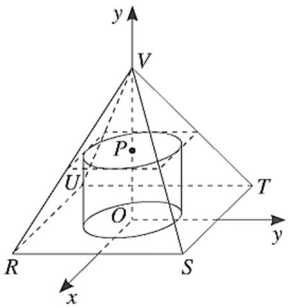
   1.1. Determine uma expressão analítica de f.
   1.2. Determine os intervalos onde a função é positiva.
   1.3. Indique os zeros da função h definida por $h(x) = f(-x)$.

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, polinomial de 4º grau. Sabe-se que o polinómio que a define trem o zero duplo 0 e os zeros simples -1 e 1 e que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{16}$.



   2.1. Determine uma expressão analítica da função f.
   2.2. Prove que f é par.
   2.3. Considere a função g definida por $g(x) = f(x) + k$, com k real. Indique um valor de k para o qual g tenha apenas dois zeros.

3. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular. Sabe-se que:



   - A base $[RSTU]$ é um quadrado de área 16 com centro em O;
   - A aresta $[RS]$ é paralela ao eixo Oy;
   - $V(0, 0, 4)$

   Considere um ponto P que se desloca ao longo de $[OV]$, nunca coincidindo com O, nem com V.
   Para cada posição de P, considere o cilindro, tal que:
   - A base inferior do cilindro tem centro em O e está contida no plano xOy;
   - A base superior tem centro em P e está inscrita no quadrado que é a interseção da pirâmide com o plano paralelo a xOy e que contém P.

   Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z.
   Justifique que o domínio da função f é $]0, 4[$ e que

$$f(z) = \pi\left(\frac{z^3}{4} - 2z^2 + 4z\right)$$

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

   4.1. $3x^3 - 63x + 60 \leq 0$
   4.2. $x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x > 0$
   4.3. $x(x^2 - 19) \leq 30$
   4.4. $x^3 + 6x^2 + 5x < 12$

Soluções

1.

1.1. $f(x) = a(x-2)^2(x+1) = x(x^3 - 3x^2 + 4)$

1.2.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Concluímos que $f(x) > 0$ quando $x \in]-1, +\infty[\backslash\{2\}$

1.3. $h(x) = f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 4$

h é uma reflexão em torno o eixo Oy da função f, logo, os zeros de h são simétricos aos zeros de f, ou seja, -2 e 1.

2.

2.1. $f(x) = ax^2(x+1)(x-1)$

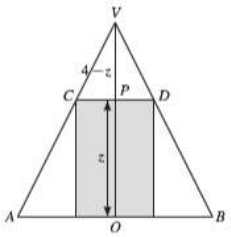
Sabendo que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{16} \Leftrightarrow a = 1$, logo $f(x) = x^2(x+1)(x-1) = x^4 - x^2$

2.2. Como $f(x) = f(-x)$, a função f é par

2.3. Por exemplo, $k = 1$

3. O ponto P desloca-se ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O nem com V. Sendo assim, a cota do ponto P varia entre a cota do ponto O, que é 0, e a cota do ponto V, que é 4. Logo, o domínio da função f é o intervalo $]0, 4[$.

Expressão analítica:



Como os triângulos $[VPD]$ e $[VOD]$ são semelhantes:

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{VP}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{r}{2} = \frac{4-z}{4} \Leftrightarrow r = \frac{4-z}{2}$$

Logo, o volume do cilindro, em função de z é:

$$f(z) = A_{base} \times altura = \pi\left(\frac{4-z}{2}\right)^2 z = \pi\left(\frac{z^3}{4} - 2z^2 + 4z\right)$$

4.

4.1. $S =]-\infty, -5] \cup [1,4]$

x	$-\infty$	-5		1		4	$+\infty$
$3(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+x-20	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4.2. $S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\backslash\{3\}$

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-6x+9	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

4.3. $S =]-\infty, -3] \cup [-2,5]$

x	$-\infty$	-3		-2		5	$+\infty$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2-2x-15$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4.4. $S =]-\infty, -4[\cup]-3, 1[$

x	$-\infty$	-4		-3		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2+7x+12$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$