Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Funções com radicais. Equações e inequações irracionais

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 1 - \sqrt{x}$. Determine:

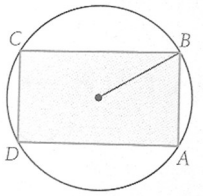
1.1. O domínio de f.

1.2. O extremo absoluto de f.

1.3. O contradomínio de f.

1.4. Descreva a sequência de transformações que permita obter o gráfico da função ta obter o gráfico da função f a partir do gráfico da função $y = \sqrt{x}$.

2. Considere um círculo de raio $2\ cm$, no qual se inscreveu o retângulo $[ABCD]$. Seja $\overline{AB} = x\ cm$.



2.1. Mostre que a área do retângulo $[ABCD]$ é dada, em função de x, por $A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

2.2. Indique o conjunto de valores que x pode tomar.

2.3. Determine o valor de x que é solução da equação $A(x) = x$.

2.4. Use a calculadora gráfica para determinar o valor de x para o qual se obtém o retângulo com maior área. Apresente o resultado arredondado às décimas.

3. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$.

3.1. Determine o domínio e o contradomínio de f.

3.2. Estude a monotonia e o sentido da concavidade do gráfico de f.

3.3. Descreva a sequência de transformações que permite obter o gráfico da função f a partir do gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

4. Resolva as seguintes equações:

4.1. $\sqrt{x-4} = 2$

4.2. $3x - 4 + \sqrt{x-4} = 2(x+3)$

4.3. $\sqrt{x+2} = 1 - \frac{x}{2}$

4.4. $3\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 0$

4.5. $\sqrt[3]{3-x} = 1$

4.6. $\sqrt[3]{x+3} - x = 3$

4.7. $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{5-x}$

5. Represente sob a forma de intervalo s os conjuntos-solução das seguintes condições:

5.1. $\sqrt{x+3} < 5$

5.2. $\sqrt{2x-1} \geq 4$

5.3. $\sqrt{4+3x} \geq 1 - \sqrt{x}$

Soluções

1.

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty[$

1.2. $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 1$

Assim, 1 é máximo absoluto de f

1.3. Como $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, então $D'_f =]-\infty, 1]$

1.4. O gráfico de f é imagem do gráfico cartesiano de $y = \sqrt{x}$ por uma reflexão de eixo Ox, seguida pela translação de vetor $(0,1)$.

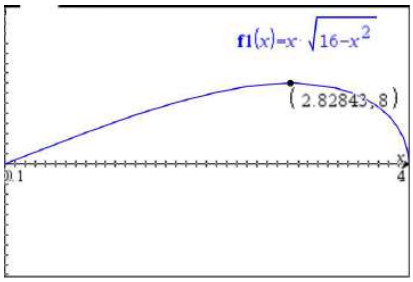
2.

2.1. $\overline{BC} = 2\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$, logo: $A(x) = 2\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \times x = 2x\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = x\sqrt{16 - x^2}$

2.2. $x \in]0, 4[$

2.3. $A(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$, porque $x \in]0, 4[$

2.4. $x \approx 2{,}8\ cm$



3.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

3.2. f é crescente em $\mathbb{R}$.

Concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e voltada para baixo em $[-2, +\infty[$

3.3. O gráfico da função f é imagem do gráfico cartesiano de $y = \sqrt[3]{x}$ pela translação de vetor $(-2, -1)$.

4.

4.1. $D = [4, +\infty[$

$\sqrt{x - 4} = 2 \Rightarrow x = 8$

Verificação:

se $x = 8$: $\sqrt{8 - 4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$. Proposição verdadeira.

Logo, $S = \{8\}$

4.2. $D = [4, +\infty[$

$3x - 4 + \sqrt{x - 4} = 2(x + 3) \Rightarrow x = 13 \vee x = 8$

Verificação:

Se $x = 13$: $3 \times 13 - 4\sqrt{13 - 4} = 2(13 + 3) \Leftrightarrow 38 = 22$. Proposição falsa

Se $x = 8$: $3 \times 8 - 4\sqrt{8 - 4} = 2(8 + 3) \Leftrightarrow 22 = 22$. Proposição verdadeira

Logo, $S = \{8\}$

4.3. $D = [-2, +\infty[$

$\sqrt{x + 2} = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{5} \vee x = 4 + 2\sqrt{5}$

Verificação:

Se $x = 4 - 2\sqrt{5}$: $\sqrt{4 - 2\sqrt{5} + 2} = 1 - \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow -1 + \sqrt{5} = -1 + \sqrt{5}$. Proposição verdadeira

Se $x = 4 + 2\sqrt{5}$: $\sqrt{4 + 2\sqrt{5} + 2} = 1 - \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5} = -1 - \sqrt{5}$. Proposição falsa

Logo, $S = \{4 - 2\sqrt{5}\}$

4.4. $D = [2, +\infty[$

$3\sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 0 \Rightarrow x = 4$

Verificação:

Se $x = 4$: $3\sqrt{4} + \sqrt{4 - 2} = 0 \Leftrightarrow 6 + \sqrt{2} = 0$. Proposição falsa

Logo, $S = \{\ \}$

4.5. $D = \mathbb{R}$; $S = \{2\}$

4.6. $D = \mathbb{R}$; $S = \{-4, -3, -2\}$

4.7. $D = \mathbb{R}$; $S = \{1\}$

5.

5.1. $D = [-3, +\infty[$

$\sqrt{x+3} < 5 \Leftrightarrow x < 22$

$S = [-3, +\infty[\cap]-\infty, 22[= [-3, 22[$

5.2. $D = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\sqrt{2x-1} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{2}$

$S = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left[\frac{17}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{17}{2}, +\infty\right[$

5.3. $D = [0, +\infty[$

Se $x \in [0, 1]$, então $\sqrt{4+3x} > 0 \wedge 1 - \sqrt{x} \geq 0$, logo: $\sqrt{4+3x} \geq 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq -2x - 3$

Como para $x \in [0, 1]$ se tem $-2x - 3 < 0$, então a condição anterior é universal neste conjunto.

Para $x \in]1, +\infty]$, tem-se $\sqrt{4+3x} > 0 \wedge 1 - \sqrt{x} < 0$, então a condição $\sqrt{4+3x} \geq 1 - \sqrt{x}$ é universal neste conjunto.

$S = [0, +\infty[$