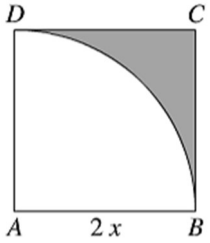
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Função quadrática

1. Na figura estão representados um quadrado $[ABCD]$ de lado $2x$ e um arco de circunferência de centro em A e raio $[AB]$.



1.1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$ que a cada valor de x faz corresponder a área da região colorida.
Mostre que f pode ser definida analiticamente por $f(x) = (4 - \pi)x^2$.

1.2. O gráfico de f é um arco de parábola. Indique, justificando, o sentido da concavidade do gráfico de f.

2. Para cada uma das parábolas a seguir definidas, indique as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria e escreva-as na forma $y = ax^2 + bx + c$.

2.1. $y = x^2 + 1$

2.2. $y = -2(x + 3)^2$

2.3. $y = 5(x - 4)^2 - 3$

2.4. $y = (2 - x)^2 + 5$

3. Escreva na forma $y = a(x - h)^2 + k$ as funções a seguir definidas.

3.1. $f(x) = x^2 + 3x + 5$

3.2. $g(x) = x^2 - 2x - 1$

3.3. $h(x) = -2x^2 + 8x - 2$

4. Represente graficamente cada uma das funções do exercício anterior, indicado as coordenadas do vértice do seu gráfico e o seu contradomínio.

5. Considere as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 6x + 1$ e $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

5.1. Represente as funções f e g na forma $y = a(x - h)^2 + k$.

5.2. Indique:

5.2.1. As coordenadas dos vértices das parábolas que representam graficamente a função f e a função g;

5.2.2. Os extremos e o contradomínio de cada uma das funções;

5.2.3. Os intervalos de monotonia de f e de g.

5.3. Determine os pontos de interseção entre os gráficos de f e de g.

6. Considere a função f definida por $f(x) = x^2$.

6.1. Indique os zeros da função $f(x) = -2$.

6.2. Indique o contradomínio da função $f(x + 3)$.

6.3. Estude o sinal da função $f(x - 2)$.

6.4. Indique os intervalos de monotonia da função $-f(x + 5)$.

7. A função g definida por:

$$g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{14}{9}x + 5{,}8$$

Traduz o voo de um pequeno avião de papel lançado de uma varanda de um prédio, onde g representa a altura (em metros) e x o tempo (em segundos) desde o lançamento.

7.1. Determine a altura da varanda de onde foi lançado o avião de papel.

7.2. Determine o tempo de voo do avião de papel. Apresente o resultado arredondado às unidades.

7.3. Determine a altura máxima atingida pelo avião de papel.

7.4. Quanto tempo permaneceu o avião de papel a uma altura superior a $5\ m$? Apresente o resultado com uma casa decimal.

Soluções

1.

1.1. $A_{[ABCD]} = 4x^2$, $A_{circunferência} = 4x^2\pi$,
logo $f(x) = (4-\pi)x^2$

1.2. Concavidade voltada para cima

2.

2.1. Vértice da parábola: $(0,1)$;
eixo de simetria: $x = 0$; $y = x^2 + 1$

2.2. Vértice da parábola: $(-3,0)$;
eixo de simetria: $x = -3$; $y = -2x^2 - 12x - 18$

2.3. Vértice da parábola: $(4,-3)$;
eixo de simetria: $x = 4$; $y = 5x^2 - 40x + 77$

2.4. Vértice da parábola: $(2,5)$;
eixo de simetria: $x = 2$; $y = x^2 - 4x + 9$

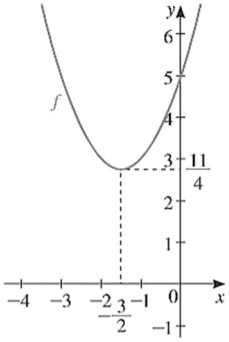
3.

3.1. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

3.2. $g(x) = (x-1)^2 - 2$

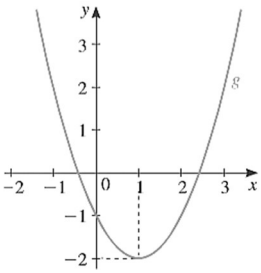
3.3. $h(x) = -2(x-2)^2 + 6$

4.



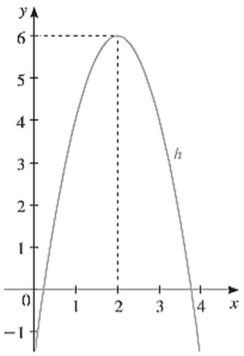
Coordenadas do vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$

Contradomínio: $\left[\frac{11}{4}, +\infty\right[$



Coordenadas do vértice: $(1,-2)$

Contradomínio: $[-2, +\infty[$



Coordenadas do vértice: $(2,6)$

Contradomínio: $]-\infty, 6]$

5.

5.1. $f(x) = (x-3)^2 - 8 \quad e \quad g(x) = -2(x+1)^2 + 3$

5.2.

5.2.1. $V_f(3,-8)$ e $V_g(-1,3)$

5.2.2. f tem um mínimo absoluto igual a -8, para $x = 3$; $D'_f = [-8, +\infty[$
g tem um máximo absoluto igual a 3, para $x = -1$; $D'_g =]-\infty, 3]$

5.2.3. f é decrescente em $]-\infty, 3]$ e crescente em $[3, +\infty[$
g é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, +\infty[$

5.3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$
Como $f(0) = 1$ e $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{23}{9}$, os dois gráficos intersetam-se nos pontos $(0,1)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{23}{9}\right)$.

6.

6.1. $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, portanto os zeros são $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

6.2. $D' = [0, +\infty[$

6.3. Parábola de vértice no ponto $(2,0)$ e concavidade voltada para cima. Logo, a função é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

6.4. A função é crescente em $]-\infty, -5]$ e decrescente em $[-5, +\infty[$

7.

7.1. $g(0) = 5{,}8$
O avião de papel foi lançado de uma altura de 5,8 metros.

7.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 17 \vee x \approx -3$
O voo do avião de papel teve a duração de 17 segundos, aproximadamente.

7.3. A altura máxima atingida pelo avião corresponde à ordenada do vértice da parábola que representa a função g.
Portanto, a altura máxima atingida pelo avião foi 11,24 metros.

7.4. $g(x) = 5 \Leftrightarrow x \approx 14{,}5 \vee x \approx -0{,}5$
Como a parábola que traduz o voo do avião tem a concavidade voltada para baixo:
$g(x) > 5 \Leftrightarrow x \in]-0{,}5; 14{,}5[\cap [0, 17]$
$= [0;\ 14{,}5[$
A altura foi superior a 5 metros durante aproximadamente 14,5 segundos.