Nome do aluno | Nº | Data / / 20

AVALIAR CONHECIMENTOS - SOLUÇÕES

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Como (a_n) tende para zero por valores negativos, tem-se, pelo gráfico de f, que $\lim f(a_n) = -\infty$.

   A opção correta é a (A).

2. $\lim u_n = 4^-$

   A opção correta é a (B).

3. Como $\lim h(x_n) = 5$, a sucessão x_n terá de tender para -3 por valores maiores do que -3.

   A opção correta é a (A).

4. D

5. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   A opção correta é a (D).

6. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$

   Logo, para existir $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, a imagem de -2 pela função f tem de ser igual a -4. Como $f(-2) = a$, $a = -4$.

   A opção correta é a (A).

7. $\lim\limits_{x \to -3^+} = \frac{2}{9 - x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

   A opção correta é a (D).

8. $\lim\limits_{x \to 2^-} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{a} = 0$, com $a \in \mathbb{R}^+$

   A opção correta é a (B).

9. $\lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

   A opção correta é a (D).

10. $\lim\limits_{x \to 2}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(\underbrace{g(x)}_{4}) \underset{y = g(x)}{=} \lim\limits_{y \to 4} f(y) = 0$

    A opção correta é a (C).

RESPOSTA ABERTA

11.

11.1.

Seja (x_n) uma sucessão de elementos do domínio de f com limite 1. Então:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n - 1}{2x_n} = \frac{1-1}{2} = 0$$

11.2.

Seja (y_n) uma sucessão de elementos do domínio de f com limite $-\infty$.
Então:

$$\lim f(y_n) = \lim \frac{y_n - 1}{2y_n} = \lim \frac{y_n\left(1 - \frac{1}{y_n}\right)}{2y_n} = \lim \frac{1 - \frac{1}{y_n}}{2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{-\infty}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

12.

12.1.

Sejam $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ e $y_n = 2$. Ambas são sucessões de termos pertencentes ao domínio de f com limite 2; no entanto, $\lim f(x_n) = 3 \neq 1 = \lim f(y_n)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

12.2.

12.2.1.

Tem-se:

$$\lim a_n = \lim \frac{2 - 2n}{n} = \lim\left(\frac{2}{n} - 2\right) = -2^+$$

Então, $\lim f(a_n) = 3$.

12.2.2.

Tem-se:

$$\lim b_n = \lim(-n^2 + 3n - 5) = \lim\left(n^2\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)\right) = -\infty$$

Então, $\lim f(b_n) = -\infty$.

12.3.

$$\lim_{x \to 0}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 3x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x(x^2 - x)}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{x^3 - 3x - 2}$$

Aplicando a regra de Ruffini:

	1	0	−3	−2
−1		−1	1	2
	1	−1	−2	0

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

Logo:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2 - x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{3} \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1}$$

Este limite não existe, uma vez que é igual a $-\infty$ à direita e é igual a $+\infty$ à esquerda.

13.

13.1.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (5-3x) = 2 = g(1)$$

Logo, existe $\lim_{x\to 1} g(x)$.

$$\lim_{x\to -4^+} g(x) = \lim_{x\to -4^+} (5-3x) = 17$$

$$\lim_{x\to -4^-} g(x) = \lim_{x\to -4^-} \frac{6}{x+4} = -\infty$$

Logo, não existe $\lim_{x\to -4} g(x)$.

13.2.

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

13.3.

Tem-se que $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{6}{x+4} = 0$. Como $2\cos x$ é limitada, $\lim_{x\to -\infty} [g(x) \times (2\cos x)] = 0$.

14.

14.1.

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

Aplicando a regra de Ruffini:

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax^2+x) = a+1 = h(1)$$

Para existir limite em $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^-} h(x) = h(1) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = a+1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

14.2.

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (1-bx) = 1-2b$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{8-1}{4-1} = \frac{7}{3}$$

Para existir limite em $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^-} h(x) = h(2) \Leftrightarrow 1-2b = \frac{7}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$$

15.

15.1.

15.1.1. Grau 0 ou 1

15.1.2. $3x^2+x+5$

16.

16.1.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 5x - 20) = +\infty$$

16.2.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x) = -\infty$$

16.3.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 5}{5x^2 - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(5 - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

16.4.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x - 3)} = 1$$

16.5.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 2}}{5x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}{x\left(5 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

16.6.

$$\lim_{x \to a^-} \frac{x^3 + 2x - a^3 - 2a}{(x - a)^2}$$

Aplicando a regra de Ruffini:

	1	0	2	$-a^3 + 2a$
a		a	a^2	$a^3 + 2a$
	1	a	$a^2 + 2$	0

$$x^3 + 2x - a^3 - 2a = (x - a)(x^2 + ax + a^2 + 2)$$

Logo:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{x^3 + 2x - a^3 - 2a}{(x - a)^2} = \lim_{x \to a^-} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2 + 2)}{(x - a)^2} =$$

$$= \lim_{x \to a^-} \frac{x^2 + ax - a^2 + 2}{x - a} = \frac{a^2 + a^2 + a^2 + 2}{0^-} = -\infty$$

16.7.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{5}{2x} \times (x^2 + 1)\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 5}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(5 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \times \frac{2}{x}} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

16.8.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

16.9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-2}{1 - \infty} = 0$$

16.10.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

16.11.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 2x + 4}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

16.12.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

16.13.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 + 3}{2x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(\frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)}{2x^4} = \frac{0}{2} = 0$$

16.14.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5 + x} - \sqrt{5}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{5 + x} - \sqrt{5})(\sqrt{5 + x} + \sqrt{5})}{x(\sqrt{5 + x} + \sqrt{5})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 + x - 5}{x(\sqrt{5 + x} + \sqrt{5})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{5 + x} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

16.15.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{5}{x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 2}{5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{5x} = \frac{2}{5}$$

16.16.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1})(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 1})}{(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 1})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1 - x + 1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

16.17.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x - 1}\,(x + 1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

16.18.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{2x^2-5x+2}} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-2x+1}{\sqrt{(2x-1)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(-2x+1)\sqrt{(2x-1)(x-2)}}{(2x-1)(x-2)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-\sqrt{(2x-1)(x-2)}}{x-2} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0$$

(1) $x \to \frac{1}{2}^-$ porque $2x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2} \vee x \geqslant 2$