

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 25 DE JUNHO 2019
CADERNO 1**

1.

1.1.

O ângulo VAC é formado pelos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AV} .

As coordenadas dos pontos A , C e V são, respetivamente, $A(2, 1, 0)$; $C(0, -1, 2)$ e $V(3, -1, 2)$.

Sendo α a amplitude do ângulo VAC , temos $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV}}{\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AV}\|}$ pelo que:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = -2 + 4 + 4 = 6; \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \quad \|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Assim, $\cos \alpha = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e como $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 55^\circ$ a amplitude do ângulo VAC é aproximadamente 55° (0 c.d.).

1.2.

Determinamos a equação do plano da base da pirâmide considerando o vetor, \overrightarrow{VM} , perpendicular à base, isto é, normal ao plano da base, em que o ponto M é o centro da base e ponto médio de $[CA]$.

Então,

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{VM} = M - V = (1, 0, 1) - (3, -1, 2) = (-2, 1, -1).$$

O plano que contém a base da pirâmide é da família $-2x + y - z + d = 0$.

Considerando que o ponto A pertence ao plano, podemos determinar d substituindo as coordenadas do ponto A na equação $-2x + y - z + d = 0$.

Deste modo, $-4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.

Assim, a equação do plano que contém a base da pirâmide é $-2x + y - z + 3 = 0$.

2.

2.1. **P2001/2002**

Como se trata de uma distribuição normal temos $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$.

Neste caso particular, $\mu = 5$ e $\sigma = \frac{1}{2}$. Sabendo que a distribuição normal é simétrica, vem:

$$P(X > 6) \approx \frac{1 - 0,9545}{2} \approx 0,023 \text{ (3 c.d.)}$$

A resposta correta é a opção (C).

2.2. **PMC2015**

Uma vez que, $\lim \left(\frac{n-2}{n} \right)^{3n} = \lim \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \right)^3 = \left(\lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \right)^3 = (e^{-2})^3 = \frac{1}{e^6}$, então:

A resposta correta é a opção (C).

3.

3.1.

Seja A o acontecimento: “ser uma bola amarela” e B o acontecimento: “ser uma bola com o logotipo desenhado”.

Como sabemos que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{15}{16}$ então,

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}.$$

Considerando n o número de bolas existentes na caixa e como existem nessa caixa três bolas amarelas com o logotipo desenhado, a probabilidade de uma bola dessa caixa ser amarela e ter o logotipo desenhado é dado pela expressão: $P(A \cap B) = \frac{3}{n}$.

Assim, $\frac{3}{n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow n = 48$.

Logo, a caixa contém 48 bolas.

3.2.

Usando a Regra de Laplace, para determinar a probabilidade pedida, temos de calcular o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Quando as dez bolas amarelas se dispõem lado a lado o número total de maneiras das três bolas com o logotipo desenhado se colocarem nessa linha reta é igual a ${}^{10}C_3$, número de casos possíveis.

O número de casos favoráveis, ou seja o número total de maneiras de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é 8.

Assim, a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é dado por:

$$p = \frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

4.

Com o número a começar em 6 e a terminar em 7 temos ${}^5C_2 = 10$ números diferentes.

Com o número a começar em 7 e a terminar em 5 temos ${}^5C_4 \times 1 = 5$ números diferentes.

Com o número a começar em 6 e a terminar em 5 temos ${}^5C_3 \times 2 = 20$ números diferentes.

Assim, no total temos, 35 números nas condições pedidas.

5.

Sabe-se que, d (diâmetro da lente) excede em $9mm$ a distância x , em que $x = \sqrt{{}^1C_1 {}^2C_2}$, então

$$d(x) = x + 9.$$

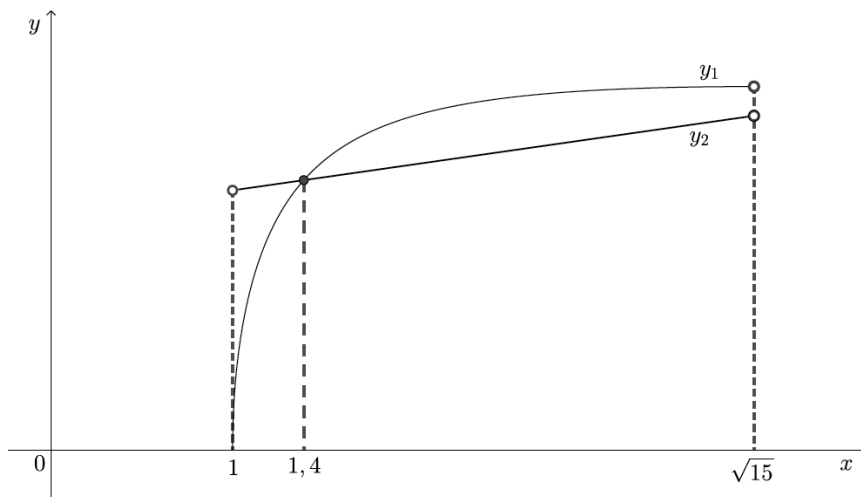
Como $r_1 = 7mm$ e $r_2 = 8mm$, conclui-se que:

$$d(x) = \frac{\sqrt{((7+8)^2 - x^2)(x^2 - (8-7)^2)}}{x} \Leftrightarrow d(x) = \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x}$$

A equação que permite resolver o problema é $\frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9$.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica representamos, de acordo com a janela

$$\left]1, \sqrt{15}\left[, \text{ a curva correspondente a } y_1 = \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} \text{ e a reta de equação } y_2 = x + 9.$$



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado da abcissa do ponto de intersecção: 1,4 (1 c.d.).

6.

Como $z = -1 + 2i$ logo $\bar{z} = -1 - 2i$.

Sendo assim, o afixo de \bar{z} encontra-se no 3.º quadrante.

Como $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$ e $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{-2}{-1} = 2$ e $2 > 1$, então $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

A resposta correta é a opção (D).

7.

Sejam a e b os dois termos consecutivos da referida progressão geométrica de razão r , com $r > 1$ e $a < b$, tais que $a + b = 12$ e que $b - a = 3$.

Portanto, tendo então em conta que a e b são dois termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão r e $a < b$, tem-se que $b = ar$, pelo que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 12 \\ b - a = 3 \end{cases} &\stackrel{b=ar}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + ar = 12 \\ ar - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a + 3 = 12 \\ ar = a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 9 \\ ar = a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2}r = \frac{9}{2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ 9r = 9 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ r = \frac{15}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ r = \frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $r = \frac{5}{3}$.

8.

Sabendo que $a + b = 2(a - b)$, $a > b$, temos que:

$$\begin{aligned}\ln(a^2 - b^2) - 2 \ln(a + b) &= \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}\right) = \ln\left(\frac{a - b}{a + b} \times \frac{a + b}{a + b}\right) = \ln\left(\frac{a - b}{a + b}\right) = \ln\left(\frac{a - b}{2(a - b)}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,7 \text{ (1.c.d.)}\end{aligned}$$

A resposta correta é a opção (C).

CADERNO 2

9.

9.1. **P2001/2002**

Uma equação que define:

$$\text{o plano } \alpha \text{ é: } x + y + z = 1$$

$$\text{o plano } \beta \text{ é: } 2x + 2y + 2z = 1$$

$$\text{o plano } \gamma \text{ é: } x + y = 0$$

Um exemplo de um vetor normal aos planos α , β e γ é, respetivamente:

$$\vec{a} = (1, 1, 1); \quad \vec{b} = (2, 2, 2) \text{ e } \vec{c} = (1, 1, 0)$$

Como os vetores \vec{a} e \vec{b} são colineares, os planos α e β são paralelos e, pelo facto de as equações $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ não serem equivalentes, concluímos que os planos são estritamente paralelos.

Uma vez que dois dos planos são estritamente paralelos a interseção dos planos α , β e γ é o conjunto vazio.

A resposta correta é a opção (A).

9.2. **PMC2015**

Sabemos que a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo.

Como a área do círculo é igual a 9π , concluímos que o raio do círculo é 3.

Assim, $2b = 2c = 6$, logo $b = c = 3$.

Além disso, sabemos que $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow a^2 = 18$, onde a é a medida do semieixo maior, pelo que a equação reduzida que define a elipse é: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

A resposta correta é a opção (A).

10.

Seja

$$w = \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2} = \frac{3 + 4i + i^2 + 2(3 - 4i)}{3 + 4i - (4 + 6i)} = \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{-1 - 2i} = \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} =$$
$$= \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} = \frac{-8 + 4i + 16i + 8}{1 + 4} = \frac{20i}{5} = 4i$$

$$\text{Então, } |w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4.$$

Assim, $|z| = 4$ representa no plano complexo a circunferência de centro na origem de raio 4.

Como $\text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$, a linha definida pela condição $|z| = 4 \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$ é o arco dessa circunferência que pertence ao primeiro quadrante, incluindo os pontos sobre os eixos coordenados, ou seja um quarto da circunferência.

O comprimento da circunferência é dado por: $P = 2 \times \pi \times 4 = 8\pi$.

Logo, o comprimento da linha pedido é $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$.

11.

Resolvendo a equação:

$$2 \cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [-\pi, 0]$, vamos descobrir as soluções da equação atribuindo valores inteiros a k .

Se $k = 0$, então $x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$. Nenhum destes valores pertence a $[-\pi, 0]$.

Se $k = -1$, então $x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$. Apenas $-\frac{2\pi}{3}$ pertence a $[-\pi, 0]$.

Se $k = -2$, então $x = -\frac{10\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$. Nenhum destes valores pertence a $[-\pi, 0]$.

Logo, a única solução da equação é $-\frac{2\pi}{3}$.

A resposta correta é a opção **(B)**.

12.

12.1. **P2001/2002**

Construindo uma tabela de dupla entrada com todas as somas possíveis, temos:

+	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Logo, $X = \{-2, 0, 2\}$ em que $P(X = -2) = \frac{1}{36}$, $P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ e $P(X = 2) = \frac{25}{36}$.

Portanto, $k = 0$.

A resposta correta é a opção (A).

12.2. **PMC2015**

A pulsação, ω , deste oscilador harmónico é π . Como o período é dado por $\frac{2\pi}{\omega}$, vem que o

período deste oscilador harmónico é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

A resposta correta é a opção (A).

13.**13.1.**

Tem-se que, para $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Assim, o declive da reta t é dado por $f'(1)$ e as coordenadas do ponto de tangência são $(1, f(1))$.

Então:

$$\bullet f(1) = \frac{1}{1 - \ln(1)} = \frac{1}{1 - 0} = 1, \text{ pelo que as coordenadas do ponto de tangência são } (1, 1);$$

$$\bullet f'(x) = \frac{x'(x - \ln x) - x(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 \times (x - \ln x) - x \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x - x + \frac{x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

Logo, o declive da reta t é $f'(1) = \frac{1 - \ln(1)}{(1 - \ln(1))^2} = \frac{1 - 0}{(1 - 0)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$ e, portanto, a equação

reduzida da reta t é da forma $y = x + b$. Como o ponto de coordenadas $(1, 1)$ pertence a t , substituindo na equação anterior, vem: $1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0$

A equação reduzida da reta t é $y = x$.

13.2.

Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

$$\bullet f(0) = 0;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = \frac{0}{0 - \ln(0^+)} = \frac{0}{0 - (-\infty)} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen} x}{x} \right)}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen} x}{1 + \cos x} \right) = \\ &= 1 \times \frac{\text{sen}(0)}{1 + \cos(0)} = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, então a função f é contínua em $x = 0$.

14.

14.1.

Comecemos por determinar a expressão analítica da derivada de g e os seus zeros:

$$\bullet g'(x) = \frac{(e^{-x})' \times x - e^{-x} \times x'}{x^2} = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

$$\bullet g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\substack{\text{Condição} \\ \text{Universal} \\ \text{em } \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\substack{\text{Condição} \\ \text{Impossível}}} \vee -x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

O sinal de g' depende apenas do sinal de $y = -x - 1$, pois $e^{-x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fazendo um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g , vem:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
$g(x)$	\nearrow	máx.	\searrow	n.d.	\searrow

Logo, a função g é decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$, é crescente em $]-\infty, -1]$ e tem um máximo relativo em $x = -1$, que é $g(-1) = \frac{e^1}{-1} = -e$.

14.2.

O declive da assíntota ao gráfico da função h é dado por $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} + 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 \times e^x} + 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)^2 \times (+\infty)} + 2 - \frac{1}{+\infty \times \sqrt{+\infty}} = 0 + 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

15.

1.º processo:

Tomemos dois pontos equidistantes da origem, por exemplo, o ponto $D(3, 4)$ pertencente à reta de equação $y = \frac{4}{3}x$, e o ponto $C(5, 0)$ pertencente ao eixo das abcissas.

Considerando um ponto genérico $P(x, y)$, pertencente à reta r , bissetriz do ângulo AOB , tem-se que:

$$\begin{aligned}\overline{CP} = \overline{DP} &\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8y = 10x - 25 - 6x + 9 + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

2.º processo:

Seja $\alpha = \widehat{AOB}$. Como o declive da reta OB é $\frac{4}{3}$, tem-se que $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4}{3}$ e o declive da reta r é dado por $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Assim,

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

(dividindo ambos os termos da fração do primeiro membro por $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$)

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6 \times \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4 - 4 \times \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 6 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4 &= 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 4 \times (-4)}}{8} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-6 \pm 10}{8} &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2 \vee \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como a reta r tem declive positivo e passa pela origem do referencial, a equação reduzida da reta r é dada por: $y = \frac{1}{2}x$.

FIM