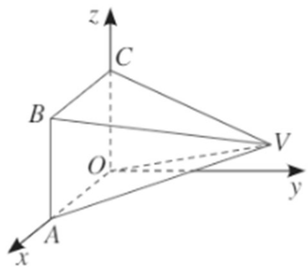
Equações vetoriais no espaço: equação vetorial de um plano

1. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ os pontos A, B e C de coordenadas $(0,-1,3)$, $(2,4,5)$ e $(0,-1,0)$, respetivamente.

    1.1. Determine as coordenadas de dois vetores, não nulos, paralelos ao plano ABC.

    1.2. Escreva uma equação do plano ABC.

2. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCOV]$ cuja base $[ABCO]$ está contida no plano xOz e o vértice V tem coordenadas $(2,8,2)$.



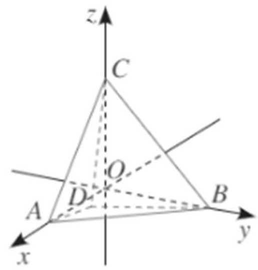
    2.1. Determine o volume da pirâmide.

    2.2. Escreva um sistema de equações paramétricas do plano OCV.

    2.3. A equação $x+4y-z-14=0$ define o plano mediador de uma das arestas laterais da pirâmide. Indique, justificando, qual é essa aresta.

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o tetraedro $[ABCD]$.
Sabe-se que o plano que contém a face $[ABC]$ é definido pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 1-s \\ y=-t, \; s,t\in\mathbb{R} \\ z = s+t \end{cases}$$



    3.1. Determine a medida da aresta do poliedro.

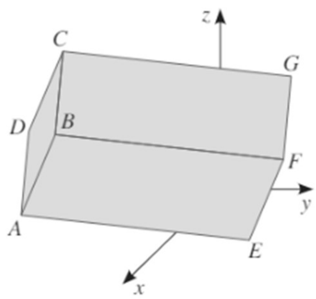
    3.2. Sabendo que a reta AD é definida pelo sistema

$$\begin{cases} x = 1+4k \\ y = k \qquad ,k\in\mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

    Determine as coordenadas do ponto D.

    3.3. Determine uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano ABC e que passa no ponto de coordenadas $(3,0,7)$.

4. No referencial ortonormado da figura está representado o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o vértice H não está representado na figura). Sabe-se que:



- O plano EFG é definido pela equação $3x-6y+2z+6=0$;
- O vértice E pertence ao plano xOy;
- A reta AE é definida pelo sistema

$$\begin{cases} x = 14+3k \\ y=-7-6k, k\in\mathbb{R} \\ z = 4+2k \end{cases}$$

- $B(16,-4,10)$ e $D(8,-9,7)$

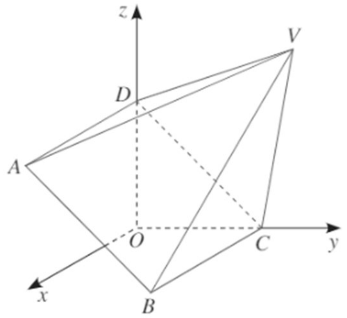
    4.1. Determine as coordenadas de A e de E.

    4.2. Determine uma equação da reta perpendicular ao plano ABC e que passa por B.

    4.3. Determine uma equação vetorial do plano mediador de $[AC]$.

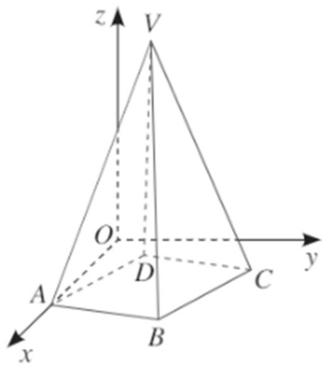
5. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$.
Sabe-se que:

- As retas AB e CD são definidas, respetivamente, pelas equações vetoriais:
  $(x, y, z) = (2, 1, 1) + k(0, 1, -1), k \in \mathbb{R}$
  $(x, y, z) = (0, 1, 1) + k(0, -2, 2), k \in \mathbb{R}$
- O ponto A pertence ao plano xOz, B pertence ao plano xOy, C pertence a Oy e D pertence a Oz.



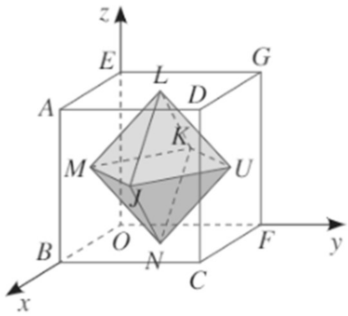
5.1. Mostre que as retas AB e CD definem um plano;
5.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que contém a base da pirâmide.
5.3. Justifique que o quadrilátero $[ABCD]$ é um retângulo.
5.4. Admitindo que o ponto V tem coordenadas $(2, 3, 2)$, determine o volume da pirâmide.

6. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy.
O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B tem coordenadas $(5, 3, 0)$.
O ponto V pertence ao plano de equação $z = 6$.
Os planos ADV e ABV têm equações $6x + 18y - 5z = 24$ e $18x - 6y + 5z = 72$, respetivamente.



6.1. Determine o volume da pirâmide.
6.2. Determine as coordenadas do ponto V.
6.3. Seja S o ponto de coordenadas $(-1, -15, 5)$.
Seja r a reta que contém o ponto S e é perpendicular ao plano ADV.
Verifique se a reta r contém o ponto B.

7. Na figura seguinte estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo e um octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo.
Um dos vértices do cubo é a origem do referencial e as suas faces estão contidas nos planos coordenados.
O plano MNK é definido pela equação $x + y + z = 2$.



7.1. Determine a medida da aresta do cubo.
7.2. Escreva uma equação vetorial do plano JUL.
7.3. Seja T um ponto da aresta $[GF]$.
Determine as coordenadas de T de modo que $\overrightarrow{LJ} \cdot \overrightarrow{LT} = -\frac{1}{2}$.

Soluções

1.

1.1. Por exemplo, $\overrightarrow{AB}(2,5,2)$ e $\overrightarrow{AC}(0,0,-3)$

1.2. $(x,y,z)=(0,-1,3)+s(2,5,2)+t(0,0,3), s,t\in\mathbb{R}$

2.

2.1. $\frac{128}{3}\ u.v.$

2.2. $\begin{cases} x=2t \\ y=8t, s,t\in\mathbb{R} \\ z=4s+2t \end{cases}$

2.3. A equação define o plano mediador de $[CV]$, pois o ponto médio tem coordenadas $(1,4,3)$ e verifica a equação $1+4\times 4-3-14=0$.

3.

3.1. $\sqrt{2}\ u.c.$

3.2. $D\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3.3. $x+y+z-10=0$

4.

4.1. $A(14,-7,4)$; $E(8,5,0)$

4.2. $(x,y,z)=(16,-4,10)+k(3,-6,2),\ k\in\mathbb{R}$

4.3. $(x,y,z)=(16,-4,10)+s(-6,12,-4)+t(-8,-5,-3), s,t\in\mathbb{R}$

5.

5.1. O vetor $\vec{u}$, diretor de AB, tem coordenadas $(0,1,-1)$ e um vetor diretor de CD tem coordenadas $(0,-2,2)$. Como $(0,-2,2)=-2(0,1,-1)$, os vetores são colineares e as retas são paralelas. O ponto C, não pertence a AB; logo AB e CD são paralelas e definem um plano.

5.2. $y+z-2=0$

5.3. $A(2,0,2)$; $B(2,2,0)$; $C(0,2,0)$; $D(0,0,2)$

Como $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BD}\|=2\sqrt{3}$ e $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $[ABCD]$ é um retângulo.

5.4. $4\ u.v.$

6.

6.1. $20\ u.v.$

6.2. $V(3,2,6)$

6.3. r: $(x,y,z)=(-1,-15,5)+k(6,18,-5),\ k\in\mathbb{R}$

Subsituindo as coordenadas do ponto $B(5,3,0)$ em $\frac{x+1}{6}=\frac{y+15}{18}=\frac{y-5}{-5}$, verifica-se que este está contido na reta r.

7.

7.1. $2\ u.c.$

7.2. $(x,y,z)=(2,1,1)+s(-1,0,1)+t(-1,1,0),\ s,t\in\mathbb{R}$

7.3. $T\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$