

Nome do aluno

Nº

Data

/ / 20

Equações trigonométricas

1. Represente no círculo trigonométrico, caso existam, dois ângulos de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox , tais que:

1.1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2. $\sin x = -\frac{1}{2}$

1.3. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Em cada alínea, indique duas amplitudes possíveis para cada ângulo representado.

2. Uma das soluções da equação $\sin x = a$ é $\frac{\pi}{9}$.
Indique o conjunto solução dessa equação.

3. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações:

3.1. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

3.2. $\sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi) = 0$

4. Considere a função f de domínio \mathbb{R} definida por $f(x) = 1 + 2 \sin(-x)$. Determine:

4.1. A expressão geral dos zeros de f .4.2. Os valores de x para os quais $f(x) = -2$.

5. Determine as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções

$$g(x) = \sin(3x) \quad e \quad h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

6. Resolva em \mathbb{R} as seguintes equações:

6.1. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

6.2. $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$

6.3. $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

6.4. $\cos x = \sin \frac{2\pi}{7}$

6.5. $\cos^2 x - \cos x = 0$

6.6. $\sin x \cos x - 2 \cos x = 0$

6.7. $4 \sin^2 x = 3$

6.8. $\tan x + 1 = 0$

6.9. $\tan^2(2x) = 3$

6.10. $\tan(2x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

6.11. $2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0$

6.12. $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2$

6.13. $\cos x \tan x = \frac{1}{2}$

6.14. $\sin(2x) = \cos(4x)$

7. Resolva em $[0, 2\pi]$ as seguintes equações:

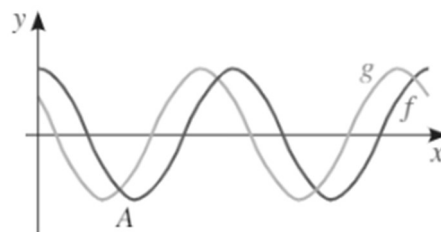
7.1. $\sin x = -\cos x$

7.2. $\sin x = \cos(2x)$

8. Considere a função real de variável real de domínio $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ definida por $f(x) = \sqrt{3} \tan(2x)$.

Determine analiticamente as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 3$.

9. Na figura estão as representações gráficas de duas funções f e g , de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. O ponto A é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g de menor abscissa. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos determine:



- 9.1. As coordenadas do ponto A .
9.2. Os zeros de g .

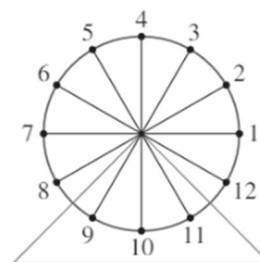
10. Resolva no intervalo $[0, 2\pi]$ as seguintes inequações:

10.1. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
10.2. $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

10.3. $\tan x > -1$

11. Uma roda gigante de um parque de diversões tem doze cadeiras. No instante em que a roda começa a girar, a cadeira número 1 está na posição indicada na figura. A distância, em metros, da cadeira número 1 ao solo, t segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por:

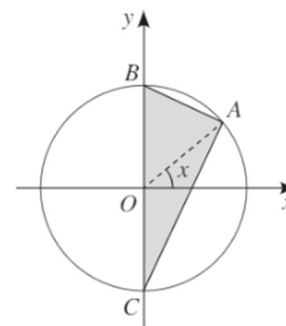
$$d(t) = 7 + 5 \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$



- 11.1. Determine a distância a que a cadeira 1 se encontra do solo no instante em que a roda começa a girar.
11.2. Determine os maximizantes e os minimizantes da função no intervalo $[0, 75]$.
11.3. Resolva a equação $d(t) = 9,5$, para $t \in [0, 75]$ e indique quanto tempo demora a cadeira 1 a encontrar-se pela primeira vez a 9,5 metros do solo, depois de a roda ter começado a girar.
11.4. Indique, justificando, qual é o comprimento do raio da roda gigante.

12. No referencial o.n. da figura estão representados a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABC]$ tal que:

- Os pontos B , C e D têm coordenadas $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$, respetivamente;
- O ponto A pertence à circunferência e $\widehat{AOD} = x$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

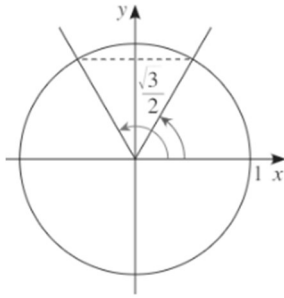


- 12.1. Admita que a abscissa de A é $\frac{3}{4}$.
Determine o valor exato de $\sin(\pi - x) - 2 \tan(-x)$.
12.2. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada em função de x por $\cos x$.
12.3. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é igual a $\sin \frac{2\pi}{3}$.

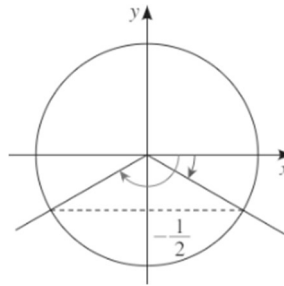
Soluções

1.

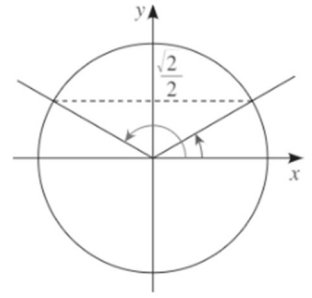
1.1. Por exemplo, 60° ou 120°



1.2. Por exemplo, -30° ou -150°



1.3. Por exemplo, 45° ou 135°



2. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi \vee x = \frac{8\pi}{9} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3.

3.1. $C.S. = \left\{ x: x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3.2. $C.S. = \left\{ x: x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

4.

4.1. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

4.2. $C.S. = \emptyset$

5. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.

6.1. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.2. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.3. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.4. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{3\pi}{14} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.5. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.6. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.8. $C.S. = \left\{ x: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.9. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.10. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.11. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.12. $C.S. = \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

6.13. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.14. $C.S. = \left\{ x: x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.

7.1. $C.S. = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

7.2. $C.S. = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

8. $\left(\frac{\pi}{6}, 3 \right)$

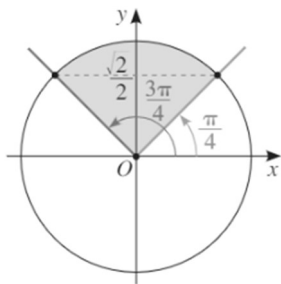
9.

9.1. $\left(\frac{5\pi}{12}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

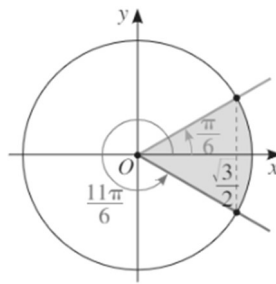
9.2. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

10.

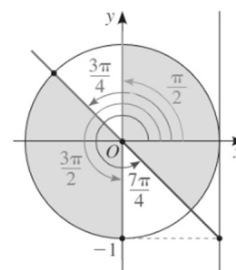
10.1. $C.S. = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$



10.2. $C.S. = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$



10.3. $C.S. = \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$



11.

11.1. 7 m

11.2. Os maximizantes são 15 e 75 e o minimizante é 45.

11.3. A cadeira 1 demora 5 minutos a encontrar-se pela primeira vez a 9,5 metros do solo.

11.4. 5 m

12.

12.1. $\frac{11\sqrt{7}}{12}$

12.2. ---

12.3. $\frac{\pi}{6}$