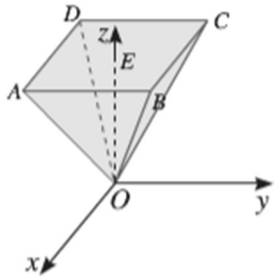
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Sistema de equações paramétricas de uma reta

1. No referencial o.n. $Oxyz$ ad figura está representada uma pirâmide quadrangular regular de vértice na origem do referencial e altura 5 e tal que E é o centro da sua base e pertence ao eixo Oz.
Sabe-se ainda que a reta OB é definida pelo sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - k \\ z = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

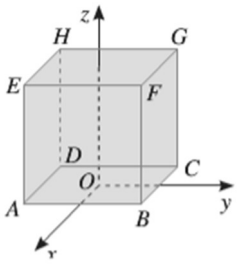


1.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 3, 5)$.
1.2. Determine o valor real de p de modo que $\vec{u}(-3p, 2p + 2, 0)$ seja colinear com $\overrightarrow{AC}$.
1.3. Determine o volume da pirâmide.

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera de diâmetro $[AB]$, em que $A(3, -1, 2)$ e $B(1, 7, 0)$.

2.1. Escreva uma condição que defina a esfera.
2.2. Calcule o perímetro da interseção da esfera com o plano yOz.
2.3. Escreva o sistema de equações paramétricas da reta AB.
2.4. Determine as coordenadas do ponto da reta AB de ordenada 3.

3. Considere, num referencial ortonormado, um cubo de faces paralelas aos planos coordenados em que a origem é o centro da face $[ABCD]$ e em que o perímetro de cada face é 16.

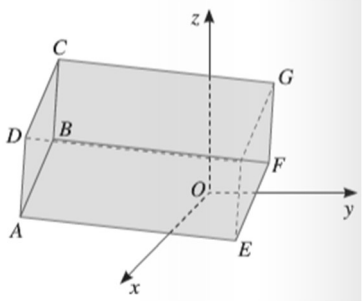


3.1. Defina analiticamente a superfície esférica circunscrita ao cubo.
3.2. Determine k de modo que o vetor $\vec{u}(k^2 - 2k, k^2 - 1, 3)$ seja colinear com $\overrightarrow{DE}$.
3.3. Sendo M e N os pontos médios das arestas $[BC]$ e $[FG]$, respetivamente, determine as coordenadas do ponto $P \in [EF]$, sabendo que a interseção do plano MNP com o cubo é um quadrado.
3.4. Escreva uma equação vetorial da reta BH.
3.5. Determine uma equação simplificada do plano mediador de $[EM]$.

4. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura). Sabe-se que:

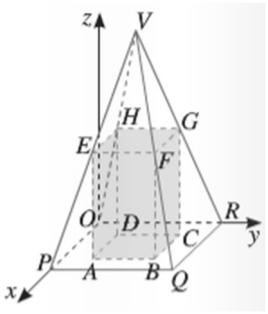
- O ponto A tem coordenadas $(14, 7, 4)$;
- O ponto B tem coordenadas $(16, -4, 10)$;
- O ponto C tem coordenadas $(10, -6, 13)$;
- O ponto E pertence ao plano xOy;
- A reta AE é definida pelo sistema de equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = -7 + 6t, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$



4.1. Determine as coordenadas do vértice E.
4.2. Determine uma equação vetorial da reta AE.
4.3. Defina, por uma condição, a aresta $[AB]$.
4.4. Escreva uma equação da superfície esférica que contém os oito vértices do prisma.
4.5. Determine uma equação da forma $ax + by + cz = d$ do plano DBF.
(Nota: o plano DBF é plano mediador de um segmento de reta cujos extremos são vértices do prisma.)

5. Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[VOPQR]$ e o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- Os vértices P e R da pirâmide pertencem aos eixos coordenados Ox e Oy, respetivamente;
- Uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide;
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto V e que contém os quatro vértices da base da pirâmide.

5.1. Mostre que $P(2, 0, 0)$ e $V(1, 1, 4)$.

5.2. Sabendo que E, F, G e H são os pontos médios das arestas da pirâmide a que pertence, determine o volume do prisma.

5.3. Escreva uma condição que defina a reta que passa em E e é paralela ao eixo Oy.

5.4. Escreva uma equação vetorial da reta CV.

Soluções

1.

1.1. $B(3,3,5)$

1.2. $p = 2$

1.3. $60\ u.v.$

2.

2.1. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \leq 18$

2.2. $2\sqrt{14}\pi\ u.c.$

2.3. $\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = -1 + 8k, k \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2k \end{cases}$

2.4. $(2,3,1)$

3.

3.1. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 12$

3.2. $k = -1$

3.3. $P\left(2, 2 - 2\sqrt{3}, 4\right)$

3.4. $(x,y,z) = (2,2,0) + k(-4,-4,4), k \in \mathbb{R}$

3.5. $-x + 2y - 2z + 5 = 0$

4.

4.1. $E(8,5,0)$

4.2. $(x,y,z) = (14,-7,4) + t(-3,6,-2), t \in \mathbb{R}$

4.3. $(x,y,z) = (14,-7,4) + t(2,3,6), t \in [0,1]$

4.4. $(x-9)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{147}{2}$

4.5. $-4x + y + 9z = 22$

5.

5.1. ---

5.2. $2\ u.v.$

5.3. $x = \frac{3}{2} \wedge z = 2$

5.4. $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + k\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4\right), k \in \mathbb{R}$