Ficha de trabalho

Matemática 10º ano

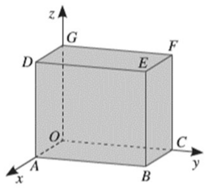
CÁLCULO VETORIAL NO ESPAÇO

Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

AVALIAR CONHECIMENTOS

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. No referencial ortonormado $Oxyz$ da figura está representado um paralelepípedo reto com um dos vértices na origem e faces paralelas aos planos coordenados. O vetor $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB}$ é igual a:



(A) $\overrightarrow{GE}$
(B) $\overrightarrow{OF}$
(C) $\overrightarrow{OE}$
(D) $\overrightarrow{BA}$

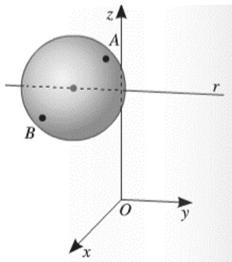
2. Considere, num referencial ortonormado, o vetor $\vec{u}(2k+1, k, 0)$ e os pontos $A(2,6,3)$ e $B(4,-2,3)$.
O valor real de k para o qual os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares é:

(A) -1 **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $-\frac{1}{3}$ **(D)** 2

3. Considere, num referencial ortonormado, os pontos $P(-1,2,3)$, $Q(1,-2,0)$ e $R(-2,2,0)$. Pode afirmar-se que:

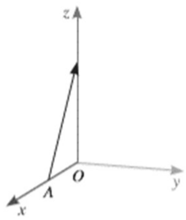
(A) $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QR}$ são colineares
(B) $\|\overrightarrow{QR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$
(C) O ponto médio de $[PQ]$ é $M(0,1,2)$
(D) $\|\overrightarrow{QR}\| = 5$

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera de centro C e diâmetro $[AB]$ e a reta r paralela ao eixo Oy e que passa por C.
Se $A(2,0,4)$ e $B(0,-2,2)$, então, uma equação vetorial da reta r é:



(A) $(x,y,z) = (1,-1,3) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$
(B) $(x,y,z) = (1,-1,3) + k(1,0,1), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x,y,z) = (2,-2,6) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$
(D) $(x,y,z) = (2,-2,6) + k(1,0,1), k \in \mathbb{R}$

5. Num referencial ortonormado $Oxyz$, considere um ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox e um ponto B pertencente ao semieixo positivo Oz. Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$?



(A) $(0,3,-5)$
(B) $(-2,0,4$
(C) $(3,0,-5)$
(D) $(-2,4,0)$

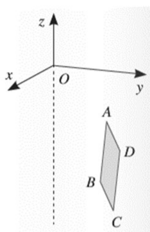
6. Considere os pontos $M(1,-2,-2)$ e $P(0,-1,2)$. As coordenadas de um vetor $\vec{v}$ colinear com $\overrightarrow{PM}$ e de norma $\sqrt{2}$ são:

(A) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$
(B) $(1,0,1)$
(C) $(1,-1,-4)$
(D) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

7. Considere a esfera definida pela condição:
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 14$$
Sabendo que $[AB]$ é diâmetro dessa esfera e que A tem coordenadas $(1,1,1)$, as coordenadas de B são:

(A) $(2,4,8)$ **(B)** $(3,5,7)$ **(C)** $(4,6,5)$ **(D)** $(5,3,6)$

8. Considere, num referencial ortonormado $Oxyz$, um paralelogramo $[ABCD]$ em que $A(1,3,-2)$, $B(4,4,-4)$ e $\overrightarrow{AC}(4,2,-3)$. Então:



(A) $D(2,4,-3) e\ C(5,5,-5)$
(B) $D(4,4,-4) e\ C(5,5,-5)$
(C) $D(1,6,-5) e\ C(8,6,-7)$
(D) $D(-3,1,1) e\ C(8,6,-7)$

9. Considere, num referencial o.n. xOy, a reta t definida por

$$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes também define a reta t?

(A) $x = -1 \wedge y = 2$

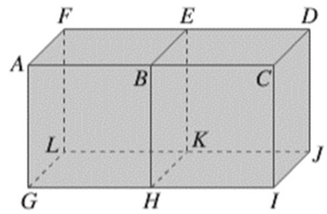
(B) $y = 2 \wedge z = 3$

(C) $x = -1 \wedge z = 3$

(D) $x = 0 \wedge z = 0$

Resposta Aberta

10. Considere os dois cubos representados, sendo que cada aresta mede $2\ dm$.



10.1. Usando as letras da figura, indique:

10.1.1. $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{IJ}$

10.1.2. $\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GA}$

10.1.3. $I - 2\overrightarrow{BC}$

10.1.4. $B + \frac{1}{2}\overrightarrow{GK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

10.1.5. $T_{\overrightarrow{LI}}([AGF])$

10.2. Determine $\|\overrightarrow{FI}\|$.

10.3. Indique dois vetores diferentes, mas com a mesma norma e a mesma direção.

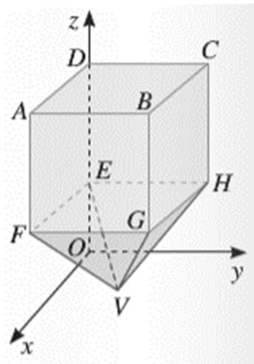
10.4. Considere que os dois cubos estão assentes sobre um referencial ortonormado tridimensional, em que K coincide com a origem, $[KH]$ está contido em Ox, $[LJ]$ está contido em Oy e $[KE]$ está contido em Oz.

10.4.1. Indique as coordenadas dos pontos A, C, J e Ge do vetor $\overrightarrow{AJ}$.

10.4.2. Represente, por meio de uma condição o mais simplificada possível, o plano mediador de $[AE]$.

10.4.3. Defina por uma equação cartesiana a superfície esférica de diâmetro $[EI]$.

11. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo e uma pirâmide quadrangular regular.



11.1. Complete, utilizando as letras da figura:

11.1.1. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BH} = \square$

11.1.2. $V + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EV} = \square$

11.2. Considere que os pontos C, E e V têm de coordenadas, respetivamente, $(0, 4, 6)$, $(0, 0, 2)$ e $(2, 2, 0)$.

11.2.1. Determine as coordenadas do vetor e do ponto referidos em **11.1**.

11.2.2. Determine uma equação vetorial da reta CE.

11.2.3. Defina por uma condição:

a) O plano BCH;

b) O plano mediador de $[CV]$.

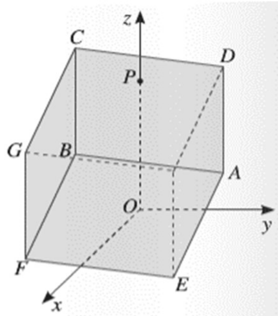
12. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(1, 3, 2)$ e $B(7, 11, 6)$. Um tiro é disparado de A, de tal forma que o projétil passa pelo ponto B. Pretende-se atingir um alvo situado no ponto $C(52, 71, 36)$.

12.1. Mostre que, se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.

12.2. A trajetória retilínea só é garantida se o alvo se encontrar a menos de 100 unidades do local onde o projétil é disparado. Prove que, no caso presente, a trajetória retilínea está garantida.

12.3. Defina por uma equação, o mais simplificada possível, o plano mediador de $[AB]$.

13. A figura anexa representa um cubo, num referencial o.n. $Oxyz$.



- $[ABCD]$ é uma face do cubo;
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (o ponto H não está representado na figura);
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo;
- Os pontos A, D, E e B têm coordenadas, respetivamente: $(3,5,3)$, $(-3,3,6)$, $(1,2,-3)$ e $(6,-1,5)$.

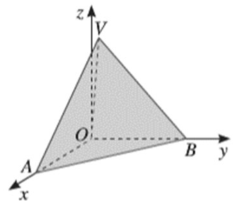
13.1. Determine as coordenadas do ponto G.

13.2. Defina por meio de uma condição a reta AE.

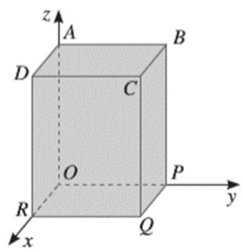
13.3. Determine uma equação da superfície esférica que contenha os oito vértices do cubo.

13.4. Determine as coordenadas do ponto P, interseção da face $[ABCD]$ com o eixo Oz.
(sugestão: determine o plano mediador do segmento $[EI]$, sendo $I = A + \overrightarrow{EA}$, e efetue em seguida a interseção deste plano com Oz.

14. A figura representa uma pirâmide triangular de vértices O, A, B e V.
O ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto V tem coordenadas $(1,1,6)$.
A reta AV pode ser definida por $(x,y,z) = (-2,2,12) + k(3,-1,-6), k \in \mathbb{R}$.
Mostre que A tem coordenadas $(4,0,0)$ e determine uma equação simplificada do plano mediador do segmento $[AV]$.



15. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo. Sabe-se que:

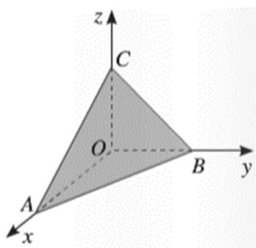


- A base $[OPQR]$ está contida no plano xOy;
- O ponto Q tem de coordenadas $(1,1,0)$;
- O vetor $\overrightarrow{AQ}$ tem de coordenadas $(1,1,-\sqrt{2})$.

15.1. Determine as coordenadas de um vetor com o sentido contrário ao vetor $\overrightarrow{AQ}$ e de norma 8.

15.2. Caracterize, por uma equação vetorial, a reta AQ e determine as coordenadas do ponto de interseção de AQ com o plano de equação $x = 3$.

16. A figura representa a parte do plano ABC que está no 1º octante. O plano ABC é o plano mediador de $[OT]$, em que O é a origem do referencial e $T(8,16,16)$.



16.1. Mostre que ABC pode ser definido por $x + 2y + 2z = 36$.

16.2. Justifique que $A(36,0,0)$, $B(0,18,0)$ e $C(0,0,18)$ e determine a área do triângulo $[ABC]$.

16.3. Escreva uma equação vetorial da reta AM, sendo M o ponto médio de $[BC]$.

16.4. Defina analiticamente a linha descrita pelo ponto A quando a pirâmide $[OABC]$ dá uma volta completa em torno do eixo Oy.