Caderno de exercícios

MAT 10 **MATEMÁTICA A**
10.º ANO

ANTÓNIO PAMPULIM
CRISTINA VIEGAS
SÉRGIO VALENTE

INCLUI:

- Sínteses com exemplos
- Mais de 500 exercícios propostos
- Respostas
- Testes 5+5 (OFERTA ONLINE)

Texto

Índice

Tema 1 Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

1. Proposições **4**
Proposições 4
Valor lógico de uma proposição 5
Equivalência 5
Negação 6
Conjunção e disjunção 7
Propriedades da negação, da conjunção e da disjunção 9
Implicação 10
Propriedades da implicação e da equivalência 11

2. Condições e conjuntos **13**
Condições 13
Solução de uma condição 14
Operações lógicas sobre condições 15
Quantificador existencial. Condições possíveis e condições impossíveis 17
Quantificador universal. Condições universais 18
Segundas leis de De Morgan 20
Conceito de contraexemplo 21
Definição de um conjunto em extensão 21
Definição de um conjunto em compreensão 21
Igualdade de conjuntos. Relação de inclusão. Interseção, união e diferença de conjuntos 22
Operações sobre condições e sua tradução em termos de conjuntos 24

Tema 2 Álgebra

1. Radicais e potências de expoente racional **28**
Monotonia da potenciação 28
Definição de $\sqrt[n]{a}$ (raiz índice n de a), com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$ 29
Propriedades dos radicais 29
Racionalização de denominadores 32
Potências de expoente racional 33
Resolução de problemas 34

2. Polinómios **35**
Noção de polinómio 35
Operações com polinómios 36
Casos notáveis 37
Divisão inteira de polinómios 37
Regra de Ruffini 40
Teorema do resto 41
Raiz ou zero de um polinómio 41
Raiz de multiplicidade n de um polinómio 42
Fatorização de polinómios 43
Exercícios globais 44

Tema 3 Geometria Analítica

1. Geometria analítica no plano **46**
Referencial ortonormado 46
Distância entre dois pontos 47
Ponto médio de um segmento de reta 48
Reta 49
Mediatriz de um segmento de reta 51
Circunferência 52
Círculo 53
Elipse 54
Semiplanos 57

2. Cálculo vetorial no plano **59**
Vetores 59
Adição de vetores 60
Produto de um vetor por um número real (escalar) 61
Coordenadas de um vetor 63
Soma de um ponto com um vetor 64
Diferença entre dois pontos 65
Vetor diretor de uma reta. Relação com o declive da reta 66
Equação vetorial de uma reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta 67

3. Geometria analítica no espaço **69**
Referencial ortonormado no espaço 69
Planos paralelos aos planos coordenados 71
Retas paralelas aos eixos coordenados 72
Distância entre dois pontos 73
Plano mediador de um segmento de reta 74
Superfície esférica 75
Esfera 76

4. Cálculo vetorial no espaço **79**
Vetores do espaço 79
Coordenadas de um vetor 79
Soma de um ponto com um vetor 80
Diferença entre dois pontos e soma de um ponto com um vetor 81
Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta 82
Equação vetorial de uma reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta 82

Tema 4 Funções Reais de Variável Real

1. Generalidades acerca de funções **86**
Conceito de função 86
Restrição de uma função 87
Imagem de um conjunto por uma função 88
Função injetiva 89
Função sobrejetiva 89
Função bijetiva 90
Composição de funções 91
Função identidade 92
Função inversa de uma função bijetiva 92

2. Generalidades acerca de funções reais de variável real **93**
Função real de variável real 93
Gráfico cartesiano de uma função real de variável real 94
Teste da reta vertical 95
Teste da reta horizontal 96
Funções pares 96
Funções ímpares 98
Relação entre o gráfico de uma função f bijetiva e o gráfico da função f^{-1} 100
Transformações de gráficos 101

3. Monotonia, extremos e concavidade **103**
Imagem de zero e zeros de uma função 103
Sinal de uma função 104
Funções limitadas 105
Monotonia 106
Extremos 107
Concavidades 109

4. Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções **110**
Funções polinomiais .....
Função quadrática .....
Inequações do segundo grau .....
Função cúbica .....
Inequações do terceiro grau .....
Funções definidas por ramos .....
Função módulo .....
Função composta de duas funções das quais uma é a função módulo .....
Equações e inequações envolvendo a função módulo .....
Resolução de equações e inequações irracionais envolvendo radicais quadráticos .....
Função raiz cúbica .....
Operações com funções .....

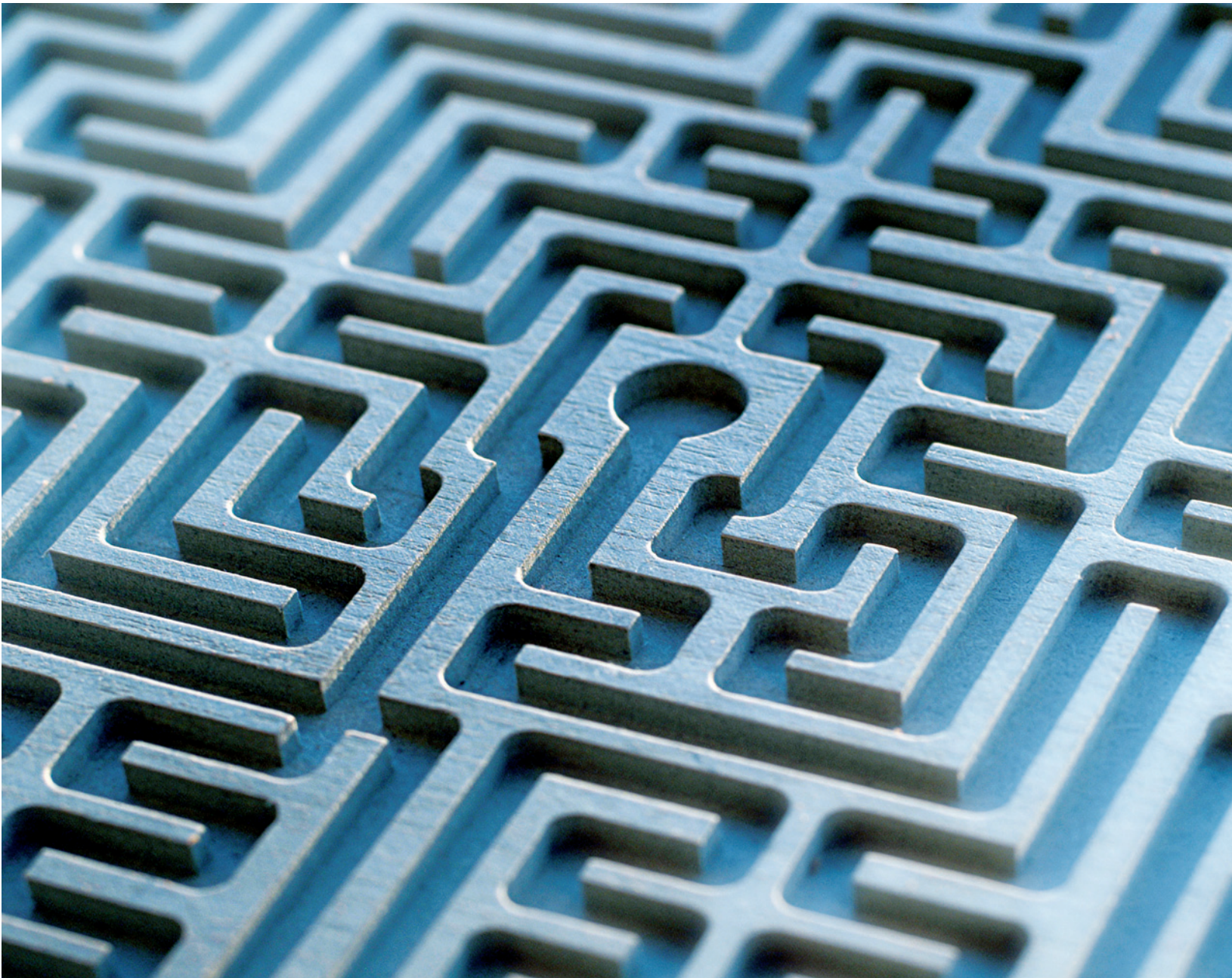
Tema 5 Estatística

1. Características amostrais .....
O símbolo de somatório .....
Variável estatística quantitativa .....
Amostra de uma variável estatística .....
Dados agrupados .....
Média .....
Desvios em relação à média .....
Soma dos quadrados dos desvios em relação à média .....
Variância e desvio padrão .....
Teorema de Chebycheff .....
Amostra ordenada .....
Percentil de ordem k .....
Percentis de ordem 25, 50 e 75 .....
Percentil de ordem k de um conjunto de dados quantitativos organizados em classes .....

Respostas .....

Tema 1

Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos



1. Proposições

Proposições

Proposição é uma expressão suscetível de ser verdadeira ou de ser falsa.

Exemplos:

São proposições:

- $2 + 3 = 5$
- «O mínimo múltiplo comum dos números 4 e 6 é 24.»
- «Lisboa é a capital de Portugal.»

Não são proposições expressões que designam entes, como, por exemplo:

- $2 + 3$
- «O mínimo múltiplo comum dos números 4 e 6.»
- «A capital de Portugal.»

Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Por isso, afirmações verdadeiras para uns e falsas para outros não são proposições.

Exemplos:

- «Coimbra é uma linda cidade.»
- «A Julia Roberts é mais bonita que a Jodie Foster.»

Julia Roberts

Jodie Foster

1. Das seguintes expressões, indica as que são proposições.

- «A cenoura é mais saborosa que o tomate.»
- «O rio Douro nasce na serra da Estrela.»
- «Maradona foi o melhor jogador de futebol de sempre.»
- «O maior número inteiro menor do que π.»
- «O máximo divisor comum dos números 10 e 24.»
- «O menor número primo é par.»

Valor lógico de uma proposição

Se uma proposição é **verdadeira**, dizemos que tem valor lógico «**verdade**» (**V**).

Se uma proposição é **falsa**, dizemos que tem valor lógico «**falso**» (**F**).

2. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $-3 - 5 = 8$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

c) $\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{14}{3}$

d) $2^3 + 2^5 = 2^8$

e) $3 - (\sqrt{2} - 2) = 1 - \sqrt{2}$

f) $2^{-4} = -8$

g) «4 é o máximo divisor comum dos números 12 e 16.»

h) «40 é o mínimo múltiplo comum dos números 4 e 10.»

i) «A soma dos números primos que pertencem ao intervalo $[1, 9]$ é um número primo.»

j) «A área de um triângulo equilátero que tem perímetro 6 é $\sqrt{3}$.»

Equivalência

Dadas duas proposições, p e q, podemos construir a proposição $p \Leftrightarrow q$, que se lê «p é equivalente a q», a qual é verdadeira se as proposições p e q tiverem o mesmo valor lógico e é falsa se as proposições p e q não tiverem o mesmo valor lógico.

Exemplos:

- a proposição $5^0 = 1 \Leftrightarrow \pi > 2$ é verdadeira ($5^0 = 1$ e $\pi > 2$ são proposições verdadeiras);
- a proposição $3^2 = 6 \Leftrightarrow -5 > 0$ é verdadeira ($3^2 = 6$ e $-5 > 0$ são proposições falsas);
- a proposição $4 < -5 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3$ é falsa ($4 < -5$ é falsa e $2 + 1 = 3$ é verdadeira).

Tabela de verdade:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Considera as seguintes proposições:

p : «O número $\sqrt{49}$ é racional.»

q : $2 + 3 \times 4 = 20$

r : $-3 < -5$

s : «Os números 2 e 3 são divisores de 3456.»

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $p \Leftrightarrow q$

b) $q \Leftrightarrow r$

c) $p \Leftrightarrow s$

4. Sejam p e q duas proposições tais que p é falsa e q é verdadeira.

Indica, justificando, o valor lógico da proposição $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$.

Negação

Dada uma proposição p, podemos construir a proposição $\sim p$, que se lê «não p», a qual é verdadeira se a proposição p for falsa e é falsa se a proposição p for verdadeira.

Exemplo:

A negação da proposição «Barcelona é uma cidade francesa.» é «Barcelona não é uma cidade francesa.»

Barcelona

Tabela de verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tem-se a seguinte propriedade (dupla negação): $[\sim(\sim p)] \Leftrightarrow p$

5. Seja p a proposição: «D. Dinis foi o primeiro rei de Portugal.»
Escreve, em linguagem corrente, a proposição $\sim p$.

6. Seja p a proposição: «O telemóvel da Inês é da mesma marca do telemóvel da Catarina.»
A proposição $\sim p$ pode ser expressa de várias maneiras.
Das expressões apresentadas a seguir, indica as que exprimem a proposição $\sim p$.

- «O telemóvel da Inês não é da mesma marca do telemóvel da Catarina.»
- «Não é verdade que os telemóveis da Inês e da Catarina sejam da mesma marca.»
- «Os telemóveis da Inês e da Catarina são de marcas diferentes.»
- «O telemóvel da Inês não é de marca diferente do telemóvel da Catarina.»
- «Os telemóveis da Inês e da Catarina não são da mesma marca.»

7. Seja p a proposição: $3^{-2} + 4^{-2} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$

a) Indica o valor lógico da proposição p.

b) Seja q uma proposição tal que é verdadeira a equivalência $p \Leftrightarrow (\sim q)$.
Qual é o valor lógico da proposição q? Justifica a tua resposta.

8. Seja p a proposição: «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo não é 90º.»

a) Indica o valor lógico da proposição p.

b) Escreve, em linguagem corrente, a proposição $\sim p$.

9. Sejam p e q duas proposições tais que é falsa a proposição $p \Leftrightarrow q$.
Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\sim(p \Leftrightarrow q)$ **b)** $[\sim(\sim q)] \Leftrightarrow p$ **c)** $(\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$

d) $p \Leftrightarrow (\sim q)$ **e)** $\sim[(\sim p) \Leftrightarrow q]$

Conjunção e disjunção

Dadas proposições p e q, podemos construir:

- **a proposição $p \wedge q$, que se lê « p e q », a qual é verdadeira apenas no caso em que as proposições p e q são ambas verdadeiras ($p \wedge q$ designa-se por conjunção de p e q);**
- **a proposição $p \vee q$, que se lê « p ou q », a qual é falsa apenas no caso em que as proposições p e q são ambas falsas ($p \vee q$ designa-se por disjunção de p e q).**

Exemplo:

Seja p a proposição «Hoje almoço em casa.» e seja q a proposição «Amanhã janto fora.»

Então, a proposição $p \wedge q$ é «Hoje almoço em casa e amanhã janto fora.» e a proposição $p \vee q$ é «Hoje almoço em casa ou amanhã janto fora.»

Tabelas de verdade:

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Convenção de escrita (prioridade das operações lógicas)

A expressão $[(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow r$ pode ser escrita sem parêntesis: $\sim p \wedge q \Leftrightarrow r$

De facto, na escrita de uma expressão que envolve operações lógicas, convenciona-se a ordem seguinte relativamente à prioridade das operações:

1.ª Negação.

2.ª Conjunção e disjunção (entre a conjunção e a disjunção não existe prioridade).

3.ª Equivalência.

10. Em cada uma das alíneas seguintes está escrita uma expressão que é conjunção de duas proposições.

Para cada alínea, indica quais são essas proposições.

a) «A Filipa é filha da Joana e do Marco.»

b) «18 é múltiplo de 3 e de 6.»

c) $1 < 2 < 3$

11. Em cada uma das alíneas seguintes está escrita uma expressão que é disjunção de duas proposições.

Para cada alínea, indica quais são essas proposições.

a) «A Teresa tem dois ou três irmãos.»

b) $\frac{9}{4} \leqslant 2{,}5$

c) «Pelo menos um dos meus filhos, Margarida e Pedro, vai comigo ao cinema esta tarde.»

12. Considera as seguintes proposições:

p : «Vou comer uma laranja.»

q : «Vou comer uma maçã.»

Traduz, em linguagem corrente, as seguintes proposições.

a) $\sim p$

b) $p \wedge q$

c) $p \wedge \sim q$

d) $\sim p \wedge \sim q$

e) $p \vee q$

f) $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

13. Sejam A e B dois conjuntos e sejam p , q e r as seguintes proposições:

$p : 2 \notin A$

$q : 3 \in A$

$r : 3 \in B$

a) Utilizando apenas as letras p , q e r e os símbolos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, traduz, em linguagem simbólica, as seguintes proposições.

a$_1$) «2 pertence ao conjunto A .»

a$_2$) «3 pertence ao conjunto A e ao conjunto B .»

a$_3$) «3 pertence ao conjunto A ou ao conjunto B .»

a$_4$) «2 não pertence ao conjunto A , mas 3 pertence ao conjunto B .»

a$_5$) «2 e 3 pertencem ao conjunto A .»

a$_6$) «3 pertence ao conjunto B , mas não pertence ao conjunto A .»

a$_7$) «3 não pertence ao conjunto A , nem ao conjunto B .»

b) Escreve, em linguagem corrente, as seguintes proposições.

b$_1$) $\sim p \vee q$

b$_2$) $p \wedge \sim r$

14. Sejam a e b duas proposições tais que é verdadeira a proposição $\sim a \wedge \sim b$.

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $a \wedge \sim b$

b) $a \vee \sim b$

15. Sejam p e q duas proposições tais que é falsa a proposição $p \Leftrightarrow (\sim q)$.

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$

b) $\sim p \vee q$

c) $p \wedge \sim q$

Propriedades da negação, da conjunção e da disjunção

Sejam p, q e r proposições, v uma proposição verdadeira e f uma proposição falsa.

Dupla negação	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	
Idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição	$v \wedge p \Leftrightarrow p \wedge v \Leftrightarrow p$	
Conjunção de uma proposição falsa com outra proposição	$f \wedge p \Leftrightarrow p \wedge f \Leftrightarrow f$	
Disjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição	$v \vee p \Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v$	
Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição	$f \vee p \Leftrightarrow p \vee f \Leftrightarrow p$	
Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Princípio da não contradição	$p \wedge \sim p \Leftrightarrow f$	
Princípio do terceiro excluído	$p \vee \sim p \Leftrightarrow v$	
Primeiras leis de De Morgan	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

16. Sejam p e q duas proposições.

a) Aplicando as propriedades da negação, da conjunção e da disjunção, prova as equivalências que a seguir se apresentam. Em cada passo indica as propriedades que utilizaste.

a₁) $\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow p$

a₂) $\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

a₃) $[(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow p \wedge q$

a₄) $p \vee [q \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p \vee q$

b) Prova as mesmas equivalências utilizando tabelas de verdade.

17. Sejam p e q duas proposições.

Simplifica cada uma das expressões seguintes e indica, sempre que possível, o respetivo valor lógico.

a) $[(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] \wedge p$

b) $\sim[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee (p \wedge q)$

c) $\big[((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q\big] \wedge (\sim p \vee q)$

18. A Inês e a Rita são amigas do Júlio. Sejam p e q as seguintes proposições:

p : «O Júlio e a Inês têm a mesma idade.»

q : «O Júlio e a Rita têm a mesma idade.»

Sabe-se que é verdadeira a proposição $p \wedge [q \vee \sim(p \vee q)]$.

Indica, justificando, o valor lógico da proposição «A Rita e a Inês têm a mesma idade.»

19. A Valéria lançou um dado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Sejam p , q e r as seguintes proposições:

p : «Saiu face com número par.»

q : «Saiu face com número primo.»

r : «Saiu face com número divisor de 8.»

Indica que número saiu no lançamento do dado, sabendo que é verdadeira a proposição $(p \vee q) \wedge \sim[(q \wedge r) \vee \sim r]$.

Implicação

Dadas proposições p e q , podemos construir a proposição «se p então q», que se representa simbolicamente por $p \Rightarrow q$ (o símbolo $\Rightarrow$ lê-se «implica»).

Exemplo:

Seja p a proposição «Hoje almoço em casa.» e seja q a proposição «Amanhã janto fora.»

Então, a proposição $p \Rightarrow q$ é «Se hoje almoço em casa, então amanhã janto fora.»

Tabela de verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A expressão $p \Rightarrow q$ pode ser traduzida em linguagem corrente de qualquer uma das seguintes formas:

- **p implica q ;**
- **se p então q ;**
- **q se p ;**
- **p é condição suficiente para q ;**
- **q é condição necessária para p ;**
- **p só se q .**

Convenção de escrita (prioridade das operações lógicas)

Na escrita de uma expressão com operações lógicas envolvendo a implicação, convenciona-se que esta operação tem o mesmo nível de prioridade da equivalência. Assim, tem-se a ordem seguinte relativamente à prioridade das operações lógicas:

1.ª Negação.

2.ª Conjunção e disjunção (entre a conjunção e a disjunção não existe prioridade).

3.ª Implicação e equivalência (entre a implicação e a equivalência não existe prioridade).

20. Escreve, sob a forma de implicação entre duas proposições, cada uma das seguintes afirmações.

a) «Se o Joaquim comer a sopa, a mãe dá-lhe um doce.»

b) «Serei chamado para a equipa da escola se não faltar aos treinos.»

c) «Verás Braga por um canudo só se fores ao Santuário do Bom Jesus do Monte.»

21. Sejam p e q proposições tais que p é falsa e q é verdadeira.
Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $p \Rightarrow q$ **b)** $q \Rightarrow p$ **c)** $p \vee q \Rightarrow \sim p$

22. Determina o valor lógico das proposições p , q e r em cada um dos casos seguintes.

a) Supõe que a proposição $(q \Rightarrow p \wedge r) \wedge \sim(r \Rightarrow p)$ é verdadeira.

b) Supõe que a proposição $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r) \Rightarrow r$ é falsa.

23. Sejam p e q duas proposições com valores lógicos diferentes.
Indica, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

a) $p \wedge q \Rightarrow \sim q$

b) $\sim p \Rightarrow p \vee q$

c) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

d) $\sim p \Rightarrow q$

24. Sejam p e q duas proposições tais que é verdadeira a proposição $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$.
Justifica que é verdadeira a proposição $p \Leftrightarrow q$.

25. Considera uma circunferência de centro num ponto C e raio 2. Sejam A e B dois pontos pertencentes à circunferência tais que o segmento de reta $[AB]$ não é um diâmetro.
Seja a a reta tangente à circunferência no ponto A , seja b a reta tangente à circunferência no ponto B e seja D o ponto de interseção das retas a e b .
Sejam, ainda, p , q e r as seguintes proposições:
p : «A amplitude do ângulo ACB é 60º.»
q : «O perímetro do triângulo $[ABC]$ é 6.»
r : «A amplitude do ângulo ADB é 120º.»
Indica, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

a) $p \Rightarrow q$

b) $r \Rightarrow p$

Propriedades da implicação e da equivalência

Negação da implicação	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
Implicação como disjunção	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
Disjunção como implicação	$(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p)$
Lei da conversão – implicação contrarrecíproca	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
Transitividade da implicação	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
Equivalência como dupla implicação	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
Negação da equivalência	$\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$
Transitividade da equivalência	$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Dado que a equivalência é uma dupla implicação, a expressão $p \Leftrightarrow q$ pode ser traduzida em linguagem corrente de qualquer uma das seguintes formas:

- **p é equivalente a q ;**
- **p se e só se q ;**
- **p é condição necessária e suficiente para q .**

26. Sejam p , q e r três proposições.

Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifica o mais possível a expressão $\sim(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow q)$.

27. Sejam p , q e r as seguintes proposições:

p : «Esta tarde vou estudar Matemática.»

q : «Esta noite vou ver televisão.»

r : «Esta noite vou jogar no computador.»

a) Traduz, em linguagem corrente, as seguintes proposições.

a₁) $p \Rightarrow q \wedge r$

a₂) $p \wedge \sim r \Rightarrow q$

a₃) $q \Leftrightarrow \sim r$

b) Traduz, em linguagem simbólica, as seguintes proposições.

b₁) «Se esta tarde estudar Matemática, então à noite vejo televisão ou jogo no computador.»

b₂) «Se esta tarde não estudar Matemática, então à noite não vejo televisão nem jogo no computador.»

c) Nega as seguintes proposições.

c₁) «Se esta tarde estudar Matemática, à noite vou ver televisão.»

c₂) «Esta noite vou jogar no computador, a menos que vá ver televisão.»

28. Sejam p , q e r três proposições.

Admite que é verdadeira a proposição $(p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p)$.

Utilizando as propriedades das operações lógicas, mostra que é verdadeira a proposição $q \Rightarrow \sim r$.

29. Sejam p , q e r três proposições.

Admite que é verdadeira a proposição $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow \sim q)$.

Utilizando as propriedades das operações lógicas, mostra que é verdadeira a proposição $r \Leftrightarrow \sim p$.

30. Seja p a seguinte proposição: «Se o menino está com fome, então chora.»

Das expressões apresentadas a seguir, indica as que são equivalentes à proposição p .

A. «Se o menino não chora, então não está com fome.»

B. «O menino estar a chorar é condição suficiente para se concluir que está com fome.»

C. «O menino estar com fome é condição necessária para chorar.»

D. «O menino está com fome só se estiver a chorar.»

E. «O menino chora se estiver com fome.»

2. Condições e conjuntos

Condições

Condição ou **expressão proposicional** é uma expressão com uma ou mais variáveis que se converte numa proposição quando se concretiza(m) a(s) variável(is).

Exemplos:

São condições:

- $2x + 3y = 7$
- « x é a capital de Portugal.»

A expressão $x(x + 1)$ **não é** uma condição porque não se converte numa proposição quando se substitui a variável por um número.

Podemos designar uma condição, na variável x, por $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, ...

Quando, numa condição $p(x)$, se substitui a variável x por um objeto a, a proposição que daí resulta pode ser designada por $p(a)$.

Dada uma condição $p(x)$, podemos fixar o **domínio** ou **universo** da variável (conjunto dos objetos pelos quais a variável pode ser substituída). Diz-se, então, que a condição $p(x)$ está definida nesse domínio ou universo.

Exemplos:

- na condição «O mínimo múltiplo comum dos números x e 4 é 36.», um domínio possível para a variável x é o conjunto $\mathbb{N}$;
- na condição « x é a capital de Portugal.», um domínio possível para a variável x é o conjunto das cidades europeias.

O domínio de uma variável está muitas vezes implícito.

Exemplos:

- na condição « x é um número ímpar.» é natural considerar que x tem domínio $\mathbb{N}$;
- na condição « x é um inseto.», é natural considerar que x tem por domínio o conjunto dos seres vivos.

31. Das seguintes expressões, indica as que são condições (em cada caso está indicado o domínio D da variável x).

A. «O rio x desagua na Figueira da Foz.» (D é o conjunto dos rios que nascem em Portugal)

B. $2x + 1 \neq 8$ $\quad (D = \mathbb{R})$

C. $x + x^2 + x^3$ $\quad (D = \mathbb{R})$

D. $2 \in]0, x]$ $\quad (D = \mathbb{R}^+)$

E. «O mínimo múltiplo comum dos números x e 6.» $\quad (D = \mathbb{N})$

32. Seja $p(x)$ a seguinte condição, definida em $\mathbb{R}$: $x|x-8| = x+10$

Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $p(5) \wedge \sim p(-1)$

b) $p(-2) \vee p(8)$

33. Para cada uma das condições que a seguir se apresentam, todas definidas em $\mathbb{R}$, encontra uma concretização da variável que a transforme numa proposição verdadeira e uma concretização da variável que a transforme numa proposição falsa.

a) $3x + 1 = 7$

b) $x(4x + 1) = 0$

c) $(x + 2)^2 = 25$

d) $(x - 3)^5 = -1$

e) $3x - 4 > -5$

f) $x^2(x + 3) < 0$

Solução de uma condição

Seja $p(x)$ uma condição.

Se, ao substituirmos a variável x por um objeto a, pertencente ao domínio da variável, a proposição $p(a)$ for verdadeira, dizemos que a é **solução** da condição.

Também se diz que a verifica, ou satisfaz, a condição.

Exemplos:

- 1 é uma solução da condição $2x + 3 < 7$;
- 18 é uma solução da condição «O mínimo múltiplo comum dos números x e 4 é 36.»;
- Lisboa é a solução da condição « x é a capital de Portugal.»

34. Considera que as condições que a seguir se apresentam estão definidas no universo $\{1, 2, 3\}$.

Para cada condição, indica a sua solução ou as suas soluções.

a) $5x - 3 = 4x$

b) $x^3 + 2x = 3x^2$

c) $3x^2 - 4x > 3$

d) $x^2 + |x - 5| \leqslant 11$

35. Em cada uma das alíneas seguintes, averigua se o objeto indicado é solução da condição apresentada.

a) Rio Lima — « x passa por Ponte da Barca.»

b) Baleia — « x respira por guelras.»

c) 60 — «Uma hora tem x segundos.»

d) Ano-luz — « x é uma unidade de tempo.»

e) Bartolomeu Dias — « x dobrou o cabo da Boa Esperança.»

f) 4 — «Uma pirâmide quadrangular tem x faces.»

36. Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U. Sejam a e b elementos de U.

Sabe-se que a é uma solução de $p(x)$.

Indica, justificando, qual o valor lógico da proposição $p(b) \Rightarrow p(a)$.

Operações lógicas sobre condições

A utilização das operações lógicas ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$) permite construir novas condições a partir de condições mais simples.

Exemplo:

A partir das condições $x = 4$, $x > 4$ e $x \leqslant 9$ podemos construir novas condições, tais como:

- $\sim(x = 4)$ (que também se pode escrever na forma $x \neq 4$)
- $x > 4 \wedge x \leqslant 9$ (que também se pode escrever na forma $4 < x \leqslant 9$)
- $x = 4 \vee x > 4$ (que também se pode escrever na forma $x \geqslant 4$)
- $x \leqslant 9 \Rightarrow x > 4$
- $x > 4 \Leftrightarrow x \leqslant 9$

etc.

Dizemos que:

- a condição $\sim(x = 4)$ é a negação, ou contrária, da condição $x = 4$;
- a condição $x > 4 \wedge x \leqslant 9$ é a conjunção das condições $x > 4$ e $x \leqslant 9$;
- a condição $x = 4 \vee x > 4$ é a disjunção das condições $x = 4$ e $x > 4$.

No caso de a condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ se converter numa proposição verdadeira, para qualquer concretização da variável, é habitual dizer-se que $p(x)$ implica $q(x)$ e, quando se escreve $p(x) \Rightarrow q(x)$ é, em geral, com esse significado. Note-se que, ao escrevermos $p(x) \Rightarrow q(x)$ com tal significado, estamos a enunciar uma proposição.

De igual modo, no caso de a condição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ se converter numa proposição verdadeira, para qualquer concretização da variável, diz-se que $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes e escreve-se, frequentemente, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ com esse significado. Note-se que, ao escrevermos $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ com tal significado, estamos a enunciar uma proposição.

Exemplos:

- é verdade que $x > 10 \Rightarrow x > 9$ (se um número é maior do que 10, então é maior do que 9);
- é falso que $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (pois é verdade que $(-5)^2 = 25$, mas não é verdade que $-5 = 5$) ;
- é verdade que $|x| = 9 \Leftrightarrow x = -9 \vee x = 9$;
- é falso que $x > 2 \Leftrightarrow -x > -2$ (por exemplo, 3 é maior do que 2, mas –3 não é maior do que –2).

As propriedades das operações lógicas sobre proposições estendem-se às operações sobre condições e a convenção relativa à prioridade das operações numa sequência de operações lógicas mantém-se.

37. Considera, em $\mathbb{R}$, a condição $p(x): \frac{3-5x}{2} < 4$.

Indica qual das seguintes condições é equivalente à condição $\sim p(x)$:

- $x > -1$
- $x \geqslant -1$
- $x < -1$
- $x \leqslant -1$

38. Sejam $p(n)$, $q(n)$ e $r(n)$ as seguintes condições, definidas em $\mathbb{N}$:

$p(n)$: n é divisor de 12

$q(n)$: n é divisor de 20

$r(n)$: os números 12 e 20 são múltiplos de n

Escreve uma condição equivalente a $r(n)$, recorrendo às condições $p(n)$ e $q(n)$.

39. Considera, em $\mathbb{R}$, a condição $p(x): -3 \leqslant x < 0$.

a) Exprime $p(x)$ recorrendo ao símbolo $\wedge$.

b) Escreve uma condição equivalente a $\sim p(x)$, sem utilizar o símbolo $\sim$.

40. Considera, em $\mathbb{R}$, a condição $p(x): (x-3)(x+1) = 0$.

a) Escreve uma condição equivalente a $p(x)$ sob a forma de disjunção de duas condições.

b) Escreve uma condição equivalente a $\sim p(x)$, sem utilizar o símbolo $\sim$.

41. Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$p(x): x^2 + x = 2$

$q(x): -3x \leqslant 1$

Determina uma solução para cada uma das seguintes condições.

a) $p(x)$

b) $q(x)$

c) $\sim p(x) \wedge q(x)$

d) $p(x) \wedge \sim q(x)$

e) $\sim p(x) \vee q(x)$

f) $p(x) \vee \sim q(x)$

g) $\sim[p(x) \wedge q(x)]$

h) $\sim[p(x) \vee q(x)]$

42. Traduz simbolicamente cada uma das seguintes condições, definidas em $\mathbb{R}$.

a) «Os números x e $-x$ são ambos maiores do que -5.»

b) «Pelo menos um dos números seguintes, x e $x+1$, é igual a 10.»

c) «Nem x nem x^3 são positivos.»

43. Traduz simbolicamente cada uma das seguintes proposições e indica o seu valor lógico.

a) «Se um número for negativo, então o seu quadrado é positivo.»

b) «O produto de um número pelo seu módulo é negativo se e só se o número for negativo.»

c) «Se um número é igual a 3, então é menor ou igual a 3.»

d) «Um número é diferente de 6 se e só se o seu quadrado for diferente de 36.»

Quantificador existencial. Condições possíveis e condições impossíveis

O símbolo $\exists$ chama-se **quantificador existencial** e pode-se ler «existe», «existe algum» ou «existe pelo menos um».

Exemplo:

A expressão $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 6$ lê-se: «Existe pelo menos um número real cujo quadrado é 6.»

Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U.

Tem-se, então, que $\exists x \in U : p(x)$ é uma proposição, que é:

- verdadeira, se a condição $p(x)$ tiver pelo menos uma solução;
- falsa, no caso contrário.

Nota: em vez de $\exists x \in U : p(x)$, pode-se escrever apenas $\exists x : p(x)$ se estiver implícito o domínio da variável.

Exemplo:

Admitindo que o domínio da variável x é $\mathbb{R}$, tem-se:

- a proposição $\exists x : x^2 = 6$ é verdadeira;
- a proposição $\exists x : |x| = -1$ é falsa.

Diz-se que:

- uma condição $p(x)$ é **possível** em U se for verdadeira a proposição $\exists x \in U : p(x)$;
- uma condição $p(x)$ é **impossível** em U se for falsa a proposição $\exists x \in U : p(x)$.

Exemplo:

Admitindo que o domínio da variável n é $\mathbb{N}$, tem-se:

- a condição « n é divisor de 12.» é possível;
- a condição « n^2 é um número primo.» é impossível.

44. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x + 1 = 5$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^4 = -4$

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 0$

d) $\exists n \in \mathbb{N} : n > 2 \wedge n^2 - 1$ é primo

e) $\exists n \in \mathbb{N} : 2n$ tem n divisores

45. Traduz simbolicamente cada uma das seguintes proposições e indica o seu valor lógico.

a) «Existe pelo menos um número inteiro entre –5 e –3.»

b) «Existe pelo menos um número inteiro que é igual ao seu cubo.»

c) «Existe pelo menos um número real que é menor do que o seu inverso.»

d) «Existem números naturais consecutivos cuja soma é par.»

46. Para cada uma das seguintes condições, definidas em $\mathbb{N}$, indica se ela é possível ou se é impossível.

$p(n)$: $10 \leqslant n \leqslant 15 \wedge$ a soma dos algarismos de n^2 não é um quadrado perfeito

$q(n)$: o número $(n+1)(n+2)$ tem dois divisores

$r(n)$: $6n^2 - 1$ não é um número primo

47. Para cada uma das seguintes condições, definidas em $\mathbb{R}$, indica se ela é possível ou se é impossível.

$p(x)$: $x^2 = (x-1)(x+1)$

$q(x)$: $\pi + x$ é um número racional

$r(x)$: $-x > x$

$s(x)$: existe pelo menos um número natural pertencente ao intervalo $]x, x+1[$

Quantificador universal. Condições universais

O símbolo $\forall$ chama-se **quantificador universal** e pode-se ler «qualquer que seja», «para todo» ou «para cada».

Exemplo:

A expressão $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ lê-se: «Qualquer que seja o número real, o seu quadrado é maior ou igual a zero.»

Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U.

Tem-se, então, que $\forall x \in U, p(x)$ é uma proposição, que é:

- verdadeira, se qualquer objeto é solução da condição $p(x)$;
- falsa, no caso contrário.

Nota: em vez de $\forall x \in U, p(x)$, pode-se escrever apenas $\forall x, p(x)$ se estiver implícito o domínio da variável.

Exemplo:

Admitindo que o domínio da variável x é $\mathbb{R}$, tem-se:

- a proposição $\forall x, x^2 \geqslant 0$ é verdadeira;
- a proposição $\forall x, x \geqslant 0$ é falsa.

Diz-se que:

- uma condição $p(x)$ é **universal** em U se for verdadeira a proposição $\forall x \in U, p(x)$;
- uma condição $p(x)$ não é universal em U se for falsa a proposição $\forall x \in U, p(x)$.

Exemplo:

Admitindo que o domínio da variável k é $\mathbb{Z}$, tem-se:

- a condição $2^{-k} = \frac{1}{2^k}$ é universal;
- a condição $2k = 6$ não é universal.

48. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 4n^2 - 1$ é múltiplo de 3

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 - n^2$ é ímpar

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n}{n+1}$ é um número fracionário

d) $\forall n \in \mathbb{R}, (n-1)^2 = x^2 - 1$

e) $\forall n \in \mathbb{R}, x \in \{-|x|, |x|\}$

49. Para cada uma das seguintes condições, definidas em $\mathbb{N}$, indica se ela é ou não universal.

a) $n(n+1)$ é par

b) $n+2$ e $n+5$ não são primos entre si

c) $\dfrac{3n+1}{4} \geqslant \dfrac{2n+1}{3}$

d) «No conjunto $\{n, n+1, n+2\}$ existe um único elemento que é múltiplo de 3.»

e) n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar

f) m.m.c. $(n, n+3) = n(n+3)$

50. Traduz simbolicamente cada uma das seguintes proposições e indica o seu valor lógico.

a) «O produto de qualquer número real pelo seu simétrico é um número negativo.»

b) «Todos os números reais são diferentes do seu dobro.»

c) «A soma de quaisquer três números naturais consecutivos é um número múltiplo de 3.»

d) «A média do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de dois números naturais consecutivos não é um número natural.»

51. Classifica cada uma das seguintes condições (isto é, indica se é impossível, possível mas não universal ou universal). Em cada alínea está indicado o domínio D da variável.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2} = 0$ $\quad (D = \mathbb{R})$

b) $x + |x| \geqslant 0$ $\quad (D = \mathbb{R})$

c) $x \leqslant x^3$ $\quad (D = \mathbb{R})$

d) $n + \sqrt{n}$ é irracional $\quad (D = \mathbb{N})$

e) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ é inteiro $\quad (D = \mathbb{N})$

52. Considera o conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\exists x \in A : x^2 = 2^x$

b) $\exists x \in A : 3^x < 1$

c) $\forall x \in A, x^5 - x = 0$

d) $\forall x \in A, x + |x| = 0$

53. Seja a condição $0 < x^2 < 1$. Indica, na forma de intervalo de números reais, um conjunto em que a condição seja:

a) impossível;

b) possível mas não universal;

c) universal.

54. Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\forall x \in D$, m.d.c. $(x, 30) = x$

b) $\forall x \in D$, $6x - 1$ é primo

c) $\exists x \in D : \pi + x > 9$

d) $\exists x \in D : x^3 - 4x = 0$

55. Sejam a e b números reais positivos tais que é verdadeira a proposição
$\forall x \in \{a, b\},\ 3x^2 - 10x + a = 0$.
Determina o valor de a e b .

56. Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U .
Mostra que é verdadeira a proposição $(\forall x \in U,\ p(x)) \Rightarrow (\exists x \in U : p(x))$.

Segundas leis de De Morgan

Dada uma condição $p(x)$ e um conjunto A , tem-se:

- $\sim[\forall x \in A, p(x)] \Leftrightarrow \exists x \in A : \sim p(x)$
- $\sim[\exists x \in A : p(x)] \Leftrightarrow \forall x \in A, \sim p(x)$

Exemplos:

- Designado por I o conjunto dos números ímpares, tem-se:
$$\sim(\forall x \in I, x \text{ é primo}) \Leftrightarrow \exists x \in I : x \text{ não é primo}$$
Portanto, a negação da proposição «Qualquer número ímpar é primo.» é «Existe pelo menos um número ímpar que não é primo.»
- Desigando por P o conjunto dos portugueses, tem-se:
$$\sim(\exists x \in P : x \text{ tem 100 anos de idade}) \Leftrightarrow \forall x \in P, x \text{ não tem 100 anos de idade}$$
Portanto, a negação da proposição «Existe pelo menos um português com cem anos de idade.» é «Nenhum português tem cem anos de idade.»

57. Seja p a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = 0$.
Qual das seguintes expressões é equivalente à proposição $\sim p$?
- $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0$

58. Seja p a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 < 5$.
Qual das seguintes expressões é equivalente à proposição $\sim p$?
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant 5$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geqslant 5$
- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 > 5$

59. Escreve, para cada alínea, a negação da proposição que nela figura e indica o valor lógico da proposição que escreveres.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leqslant 2x$

b) $\exists x \in \mathbb{Z} : 3x + 7 = 3$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, 6n + 3$ é ímpar

d) $\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

60. Para cada alínea, escreve, em linguagem corrente, a negação da proposição que nela figura e indica o valor lógico da proposição que escreveres.

a) «Todos os seres humanos sabem nadar.»

b) «Existem números naturais que são múltiplos de 3.»

c) «Há números inteiros entre 0 e 1.»

d) «Todos os números reais são racionais.»

Conceito de contraexemplo

Dada uma condição $p(x)$ e um conjunto A, dizemos que um elemento a, pertencente a A, é um **contraexemplo** para a proposição $\forall x \in A, p(x)$ se for falsa a proposição $p(a)$.

Exemplo:

Um contraexemplo para a proposição «Todos os planetas têm satélites naturais.» é o planeta Vénus.

61. Mostra que as seguintes afirmações são falsas apresentando um contraexemplo.

a) «O módulo de qualquer número real é maior do que zero.»

b) $\forall x \in \mathbb{R}, 3x \leqslant 5x$

c) «Todos os números ímpares entre 1 e 19 que não são quadrados perfeitos são primos.»

d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^4 > x^4$

Definição de um conjunto em extensão

Dados objetos $a_1, a_2, ..., a_k$ $(k \in \mathbb{N})$, pode representar-se por $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ o conjunto A cujos elementos são exatamente os objetos $a_1, a_2, ..., a_k$.

Designa-se a igualdade $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ por **definição em extensão** do conjunto A.

Definição de um conjunto em compreensão

Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U.

Chama-se conjunto definido por $p(x)$ em U, ou conjunto-solução de $p(x)$ em U o conjunto dos elementos de U que são soluções da condição $p(x)$.

Designando por A o conjunto-solução de $p(x)$ em U, pode escrever-se $A = \{x \in U : p(x)\}$ ou, mais simplesmente, $A = \{x : p(x)\}$. Qualquer destas igualdades diz-se **definição em compreensão** do conjunto A pela condição $p(x)$ em U.

Seja B um conjunto cujos elementos pertencem a U. O conjunto $\{x \in U : x \in B \wedge p(x)\}$, que também se pode representar por $\{x \in B : p(x)\}$, designa-se por conjunto-solução de $p(x)$ em B.

Exemplos:

- Seja A o conjunto cujos elementos são –2 e 2.
  A igualdade $A = \{-2, 2\}$ designa-se por definição em extensão do conjunto A.
  Por outro lado, tem-se que A é o conjunto-solução da condição $|x| = 2$ em $\mathbb{R}$. Assim, a igualdade $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\}$ designa-se por definição em compreensão do conjunto A.
- Seja C o conjunto cujos elementos são 2, 3, 5, 7 e 11.
  A igualdade $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ designa-se por definição em extensão do conjunto C.
  C é o conjunto-solução da condição $x < 12$ em P (conjunto dos números primos).
  Escreve-se $C = \{x \in P : x < 12\}$, definição em compreensão do conjunto C.

62. Define em extensão cada um dos seguintes conjuntos.

a) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 < x \leqslant 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 16 \vee x(x+3) = 0\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é múltiplo de } 4 \wedge n < 23\}$

63. Seja $U = \{2, 3, 4, 5\}$. Define em extensão cada um dos seguintes conjuntos.

a) $\{n \in U : n \text{ é divisor de } 12\}$

b) $\{n \in U : 2n + 1 \text{ é primo}\}$

c) $\{n \in U : n^3 - n \text{ é múltiplo de } 6\}$

d) $\{n \in U : n \text{ e } n + 5 \text{ são números primos entre si}\}$

64. Define em compreensão cada um dos seguintes conjuntos.

a) $\{-3, 3\}$

b) $\{7, 14, 21, 28\}$

c) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$

Igualdade de conjuntos. Relação de inclusão. Interseção, união e diferença de conjuntos

Sejam A e B conjuntos cujos elementos pertencem a um universo U.

Tem-se $A = B$ se e só se $\forall x \in U, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Diz-se que A está **contido** em B (escreve-se $A \subset B$) se e só se qualquer elemento de A pertence também a B, ou seja, $A \subset B$ se e só se $\forall x \in U, x \in A \Rightarrow x \in B$.

Quando $A \subset B$ também se diz que A é um subconjunto de B, ou que A é uma parte de B.

Exemplo:

$\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

Nota que todo o conjunto é subconjunto de si próprio ($B \subset B$) e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Chama-se **interseção** de A e B (escreve-se $A \cap B$) ao conjunto dos elementos comuns a A e a B, ou seja, $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$.

Chama-se **união** de A e B (escreve-se $A \cup B$) ao conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos, ou seja, $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$.

Chama-se **diferença** entre A e B (escreve-se $A \setminus B$) ao conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, ou seja, $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ então:

- $A \cap B = \{2, 4\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $A \setminus B = \{1, 3\}$

No caso em que $B \subset A$, $A \setminus B$ designa-se por **complementar** de B em A.

O complementar de A em U designa-se por complementar de A e representa-se por $\overline{A}$. Dizemos, então, que A e $\overline{A}$ são conjuntos complementares.

Exemplo:

Se o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ for tomado para universo e se $A = \{2, 3\}$ então $\overline{A} = \{1, 4, 5, 6\}$.

65. Considera o conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Qual dos conjuntos seguintes é subconjunto de A?

- $\{2, 4, 7, 16\}$
- $\{-3, 0, 3, 6\}$
- $\{-3, -1, 1, 3, 8\}$

66. Qual dos seguintes intervalos de números reais é subconjunto de $[-10, 50[$?

- $]-10, 50]$
- $[0, 50]$
- $[-12, 10]$
- $[-10, 12[$

67. Indica o resultado das seguintes interseções de conjuntos.

a) $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\}$
b) $\{1, 5, 9, 13\} \cap \{3, 5, 7, 9, 13\}$
c) $\{1, 2, 3, 5, 8, 13\} \cap \{2, 5, 8\}$
d) $\{1, 2, 4, 8, 16\} \cap \{-3, 0, 3, 6, 9\}$
e) $\{2, 5, 7\} \cap \{2, 5, 7\}$
f) $\{1, 4, 9\} \cap \varnothing$
g) $[1, 5] \cap [3, 7]$
h) $]2, 8[\cap [-3, 5]$
i) $]-3, 6] \cap [6, 9[$
j) $]1, 5] \cap]5, 9]$
k) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$
l) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$

68. Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $A \subset B$ e $C \subset D$.
Prova que $A \cap C \subset B \cap D$.

69. Indica o resultado das seguintes uniões de conjuntos.

a) $\{1, 4, 9, 16\} \cup \{3, 5, 7\}$
b) $\{-2, 0, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $[2, 6[\cup [4, 9]$
d) $]1, 8[\cup \{8\}$
e) $[-2, 7[\cup \{3, 7\}$
f) $]5, 15] \cup [8, 12[$
g) $\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Z}^-$
h) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$

70. Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$.
Indica um conjunto C com três elementos tal que $A \cup C = B$.

71. Seja $p(x)$ uma condição definida num universo U.
Sejam A, B e C subconjuntos de U tais que:

- a condição $p(x)$ é possível mas não universal no conjunto A;
- a condição $p(x)$ é universal no conjunto B;
- a condição $p(x)$ é impossível no conjunto C.

Indica qual das seguintes igualdades é necessariamente verdadeira e qual é necessariamente falsa.

- $A \cup B = B$
- $A \cap B = B$
- $A \cap C = \varnothing$
- $B \cap C = \varnothing$

72. Indica o resultado das seguintes diferenças de conjuntos.

a) $\{1, 2, 5, 6, 7, 9\} \setminus \{1, 5, 9\}$
b) $\{1, 3, 5\} \setminus \{1, 3, 5\}$
c) $\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} \setminus \{8, 9, 10, 11, 12\}$
d) $\{1, 6, 11, 16\} \setminus \{2, 4, 8\}$
e) $\{3, 4, 5, 6\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
f) $\{1, 4, 5, 9\} \setminus \varnothing$
g) $[4, 9] \setminus [6, 9]$
h) $]0, 10] \setminus [5, 15]$
i) $]0, +\infty[\setminus [-3, 18[$
j) $]-\infty, 4] \setminus \{4, 5, 6\}$

73. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.
Relativamente ao conjunto A, indica o complementar do conjunto $\{2, 8, 16\}$.

74. Considera o conjunto $P = [2, 12]$.
Relativamente ao conjunto P, indica o complementar de cada um dos seguintes conjuntos.

a) $A = [2, 10]$ **b)** $B =]5, 12]$ **c)** $C =]2, 12[$

75. Considera, no universo $\mathbb{R}$, os conjuntos $A = [-3, 8[$, $B =]3, +\infty[$ e $C = [-1, 12]$.
Determina, na forma de um intervalo ou união de intervalos, cada um dos seguintes conjuntos.

a) $A \cap B$ **b)** $B \cap C$ **c)** $A \cap C$
d) $A \cup B$ **e)** $A \cup C$ **f)** $\overline{A}$
g) $\overline{B}$ **h)** $B \setminus A$ **i)** $B \setminus C$

Operações sobre condições e sua tradução em termos de conjuntos

Tem-se:

- A condições contrárias correspondem conjuntos complementares.
- À conjunção de condições corresponde a interseção de conjuntos.
- À disjunção de condições corresponde a união de conjuntos.
- À equivalência de condições corresponde a igualdade de conjuntos.
- À implicação de condições corresponde a inclusão de conjuntos.

As propriedades da negação, da conjunção e da disjunção de proposições estendem-se às condições.

Na tabela seguinte são apresentadas estas propriedades, bem como a sua tradução em termos de conjuntos. As equivalências apresentadas na coluna do meio são universais.

Propriedades	Condições	Conjuntos
Dupla negação	$\sim[\sim p(x)] \Leftrightarrow p(x)$	$\overline{\overline{P}} = P$
Idempotências	$p(x) \wedge p(x) \Leftrightarrow p(x)$	$P \cap P = P$
	$p(x) \vee p(x) \Leftrightarrow p(x)$	$P \cup P = P$
Comutativas	$p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x) \wedge p(x)$	$P \cap Q = Q \cap P$
	$p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow q(x) \vee p(x)$	$P \cup Q = Q \cup P$
Associativas	$[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x) \Leftrightarrow p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)]$	$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$
	$[p(x) \vee q(x)] \vee r(x) \Leftrightarrow p(x) \vee [q(x) \vee r(x)]$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$
Distributivas	$p(x) \wedge [q(x) \vee r(x)] \Leftrightarrow [p(x) \wedge q(x)] \vee [p(x) \wedge r(x)]$	$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$
	$p(x) \vee [q(x) \wedge r(x)] \Leftrightarrow [p(x) \vee q(x)] \wedge [p(x) \vee r(x)]$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$
Leis de De Morgan	$\sim[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \sim p(x) \vee \sim q(x)$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$
	$\sim[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \sim p(x) \wedge \sim q(x)$	$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

continua

continuação

Tem-se também:

1. A conjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é equivalente à primeira.
2. A conjunção de uma condição qualquer com uma condição impossível é uma condição impossível.
3. A disjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é uma condição universal.
4. A disjunção de uma condição qualquer com uma condição impossível é equivalente à primeira.
5. A conjunção de uma condição com a sua negação é uma condição impossível.
6. A disjunção de uma condição com a sua negação é uma condição universal.

Em termos de conjuntos, estas propriedades traduzem-se da seguinte forma:

1. $A \cap U = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cup U = U$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
6. $A \cup \overline{A} = U$

Tem-se ainda:

1. $[\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))]$

   Esta propriedade permite provar que duas condições são equivalentes provando que a primeira implica a segunda e que a segunda implica a primeira. A uma tal prova dá-se o nome de **demonstração por dupla implicação**.
2. Em termos de conjuntos, tem-se: $P = Q \Leftrightarrow P \subset Q \wedge Q \subset P$ (**princípio da dupla inclusão**).
3. $\sim[\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\exists x : p(x) \wedge \sim q(x)]$

   Esta propriedade permite concluir que uma condição não implica outra se e só se existir um objeto que verifica a primeira e não verifica a segunda.
4. $[\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)]$

   Esta propriedade permite provar que uma condição implica outra, provando que a negação da segunda implica a negação da primeira. A uma tal prova dá-se o nome de **demonstração por contrarrecíproco**.
5. Existe um método de demonstração que tem alguma semelhança com a prova por contrarrecíproco, que tem o nome de **demonstração por redução ao absurdo**. Este método baseia-se no seguinte: admite-se que a afirmação que se pretende demonstrar é falsa e chega-se a um absurdo. Conclui-se, então, que a afirmação que se pretende demonstrar é verdadeira.

76. Considera, definidas em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$p(x) : 3x + 1 < 5x - 7$

$q(x) : x^2 + 4 > 0$

$r(x) : |x| < 0$

a) Indica o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições.

a₁) $p(x)$ **a₂)** $q(x)$ **a₃)** $r(x)$

a₄) $p(x) \wedge r(x)$ **a₅)** $p(x) \wedge q(x)$ **a₆)** $p(x) \vee r(x)$

a₇) $p(x) \vee q(x)$ **a₈)** $\sim p(x)$ **a₉)** $p(x) \wedge \sim r(x)$

b) Classifica cada uma das seguintes condições (isto é, indica se é impossível, possível não universal ou universal).

b₁) $p(x)$ **b₂)** $q(x)$ **b₃)** $r(x)$

b₄) $p(x) \wedge r(x)$ **b₅)** $p(x) \wedge q(x)$ **b₆)** $q(x) \vee r(x)$

b₇) $q(x) \wedge \sim r(x)$

77. Considera, definidas em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$p(x) : (|x| - 1)(x^2 - x - 6) = 0$

$q(x) : (x + 1)^2 > 2x$

$r(x) : x^2 - 2x + 2 = 0$

$s(x) : (x - 2)^{10} = 1$

Determina o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições.

a) $p(x) \wedge q(x)$ **b)** $p(x) \vee r(x)$ **c)** $p(x) \wedge \sim s(x)$

78. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições definidas num universo U. Seja P o conjunto-solução da condição $p(x)$ e seja Q o conjunto-solução da condição $q(x)$.

Sejam a e b elementos pertencentes a U tais que são verdadeiras as seguintes proposições:

- $\sim p(a) \Rightarrow q(a)$
- $\sim[\sim q(b) \Rightarrow p(b)]$

Justifica que são verdadeiras as seguintes proposições.

a) $a \in P \cup Q$ **b)** $b \in \overline{P} \cup \overline{Q}$

79. Num certo plano, considera três retas, r, s e t, tais que as retas r e s são estritamente paralelas.

Prova, utilizando o método de demonstração por contrarrecíproco, que: se a reta t interseta a reta r, então a reta t interseta a reta s.

80. Considera uma circunferência com centro num ponto O. Sejam A e B dois pontos da circunferência tais que $[AB]$ não é um diâmetro. Seja C o ponto de interseção das tangentes à circunferência nos pontos A e B.

Prova que o quadrilátero $[OACB]$ é um losango se e só se o ângulo AOB é reto.

81. Prova que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Tema 2

Álgebra

1. Radicais e potências de expoente racional

Monotonia da potenciação

Sejam a e b números reais e seja n um número natural.

- **Se n é ímpar, tem-se:** $a < b \Rightarrow a^n < b^n$
- **Se n é par, tem-se:** $0 \leqslant a < b \Rightarrow 0 \leqslant a^n < b^n$
  $a < b \leqslant 0 \Rightarrow a^n > b^n \geqslant 0$

Exemplos:

- como $-3 < -2$ tem-se $(-3)^9 < (-2)^9$;
- como $-7 < 2$ tem-se $(-7)^9 < 2^9$;
- como $4 < 5$ tem-se $4^9 < 5^9$;
- como $0 \leqslant 4 < 5$ tem-se $4^8 < 5^8$;
- como $-3 < -2 \leqslant 0$ tem-se $(-3)^8 > (-2)^8$.

1. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $(-10)^8 > (-3)^8$

b) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{11} > (-2)^{11}$

c) $8^{11} > (\pi - 1)^{33}$

2. Para cada uma das seguintes proposições, indica o seu valor lógico.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^3 < 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x < -3 \Rightarrow x^2 < 9$

3. Para cada uma das seguintes proposições, indica o seu valor lógico. Se considerares que a proposição é verdadeira, explica porquê; se considerares que é falsa, indica um contraexemplo.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, (-3)^{2n-1} < (-2)^{2n-1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (-3)^n < (-2)^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, (-3)^n > (-2)^n$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, (-3)^{2n} > (-2)^{2n}$

e) $\forall x \in]-\infty, -2[, \ x^{13} < (-2)^{13}$

f) $\forall x \in]-\infty, -2[, \ x^8 > 2^8$

g) $\forall x \in]-\infty, -2[, \ (x+1)^5 < (-3)^5$

4. Seja a um número real pertencente ao intervalo $]0, 1[$ e seja n um número natural. Justifica que $a^n < 1$.

Definição de $\sqrt[n]{a}$ (raiz índice n de a), com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

- Seja a um número real e seja n um número ímpar ($n \geqslant 3$).
  $\sqrt[n]{a}$ é o número real b tal que $b^n = a$.
- Seja a um número real não negativo e seja n um número par.
  $\sqrt[n]{a}$ é o número real não negativo b tal que $b^n = a$.

Notas:

- $\sqrt[n]{a}$ não tem significado para n par e $a < 0$;
- quando o índice é 2, este pode ser omitido (escreve-se $\sqrt{a}$ com o significado de $\sqrt[2]{a}$).

Exemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{81} = 3$ pois $3 \geqslant 0$ e $3^4 = 81$
- $\sqrt{25} = 5$ pois $5 \geqslant 0$ e $5^2 = 25$
- $\sqrt[5]{0} = 0$ pois $0^5 = 0$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[4]{-81}$ não tem significado
- $\sqrt{-25}$ não tem significado
- $\sqrt[6]{0} = 0$ pois $0^6 = 0$

5. Determina o valor de:

a) $\sqrt[5]{1} - \sqrt[7]{-1} + \sqrt[8]{0}$

b) $\sqrt{49} - \sqrt[3]{-27} - \sqrt[4]{16}$

c) $\sqrt[3]{-125} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{-32} - \sqrt[6]{64}$

6. Seja $a = \sqrt[5]{4}$. Determina o valor de $\dfrac{a^5}{8}$.

7. Resolve as seguintes equações.

a) $x^5 = 10$

b) $x^3 + 6 = 4$

c) $5x^9 - 7 = 8$

d) $3x^4 + 5 = 29$

Propriedades dos radicais

No que se segue:

- m e n designam números naturais maiores do que 1;
- k designa um número inteiro;
- a e b designam número reais (não negativos, se m ou n forem números pares).

Tem-se:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

continua ▶

continuação

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $(a \neq 0$ se $k < 0)$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$

6. $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \times m]{a^{p \times m}}$

Tem-se, para qualquer número natural n maior do que 1 e para quaisquer números reais a e b (com $b > 0$ se n é par):

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$ (se n é ímpar) $\qquad$ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (se n é par)

2. $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (se n é ímpar) $\qquad$ $\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$ (se n é par)

8. Determina o valor de $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 - \left(\sqrt[9]{3}\right)^9$.

9. Determina o valor de:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$

c) $\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{16}$ $\qquad$ **d)** $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$

e) $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{32}$ $\qquad$ **f)** $\left(\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{3}\right)^4$

10. Determina o valor de:

a) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{300} : \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$ $\qquad$ **d)** $\sqrt[5]{320} : \sqrt[5]{10}$

e) $\left(10\sqrt{48}\right) : \left(5\sqrt{3}\right)$ $\qquad$ **f)** $\left(\sqrt[6]{15} : \sqrt[6]{5}\right)^6$

11. Determina o valor de:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \times \sqrt[3]{4}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{200} : \left(\sqrt{2}\right)^3$

c) $\left[\sqrt[5]{84} : \left(\sqrt[5]{2}\right)^2\right]^5$

12. Passa os fatores que estão fora do radical para dentro do radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ **b)** $3\sqrt[3]{a}$

c) $5\sqrt{2}$ $\qquad$ **d)** $a\sqrt{3}$ $(a > 0)$

e) $ab^2\sqrt[5]{a}$

13. Passa os fatores possíveis para fora do radical.

a) $\sqrt[5]{7^5 \times 3}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{12}$

c) $\sqrt{18}$ $\qquad$ **d)** $\sqrt{150}$

e) $\sqrt[3]{24}$ $\qquad$ **f)** $\sqrt{8}$

g) $\sqrt[5]{128}$ $\qquad$ **h)** $\sqrt[3]{54a^8b^4}$

i) $\sqrt{27a^2}$ $\qquad$ **j)** $\sqrt[4]{32x^4}$

14. Simplifica o mais possível as expressões seguintes.

a) $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$

b) $-5\sqrt[3]{x} + 11\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[3]{x}$

c) $5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18}$

d) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{12}$

e) $3a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{8a} - 4\sqrt[3]{a^4}$

f) $3b\sqrt{2a^3b} - a\sqrt{50ab^3} + ab\sqrt{72ab}$ $(a > 0$ e $b > 0)$

15. Simplifica o mais possível as expressões seguintes.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[8]{5}} + \sqrt[6]{\sqrt[4]{5}} + \sqrt[12]{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}} \times \sqrt[6]{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$

16. Escreve como um radical de índice 12 os radicais seguintes.

a) $\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[6]{10}$

e) $\sqrt[3]{a^2}$

17. Escreve como um radical de índice 3 os radicais seguintes.

a) $\sqrt[6]{3^2}$

b) $\sqrt[6]{25}$

c) $\sqrt[12]{3^8}$

d) $\sqrt[15]{a^{10}b^5}$

e) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

18. Reduz ao mesmo índice os seguintes radicais (ou seja, escreve dois radicais equivalentes aos dados que tenham o mesmo índice).

a) $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt{3}$

d) $\sqrt[6]{3}$ e $\sqrt[4]{2}$

19. Simplifica o mais possível as expressões seguintes.

a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} : \sqrt[6]{12}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} \times \sqrt{\sqrt{8}}$

c) $\left(\sqrt[7]{4}\right)^3 : \left[\sqrt[14]{4} \times \left(\sqrt[21]{2}\right)^3\right]$

d) $\left(5 + 3\sqrt{6}\right)\left(4 - \sqrt{6}\right)$

e) $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} \times \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$

f) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$

g) $\left(4\sqrt{3\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{6} - 2\sqrt{3} \times \sqrt[4]{2}\right) : \sqrt{\sqrt{162}}$

h) $\left(\sqrt[3]{56} + \sqrt[7]{49\sqrt[3]{7}}\right)^3$

20. Sejam a, b e c números reais positivos tais que $a = \sqrt{c}$ e $b = \sqrt[3]{c}$.
Verifica que $\frac{a}{b}$ é raiz quadrada de b e que $\frac{a}{b}$ raiz cúbica de a.

Racionalização de denominadores

Para racionalizar o denominador numa fração da forma $\frac{c}{a\sqrt[n]{b}}$, multiplica-se ambos os termos por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Para racionalizar o denominador numa fração da forma $\frac{e}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$, multiplica-se ambos os termos por $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$.

Exemplos:

- $\frac{4}{5\sqrt[3]{7}} = \frac{4\times\sqrt[3]{7^2}}{5\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{7^2}} = \frac{4\sqrt[3]{49}}{5\sqrt[3]{7^3}} = \frac{4\sqrt[3]{49}}{5\times 7} = \frac{4\sqrt[3]{49}}{35}$

- $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{3\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{30}}{3\times 5} = \frac{\sqrt{30}}{15}$

- $\frac{10}{2\sqrt{3}+5\sqrt{2}} = \frac{10(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})} = \frac{10(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(5\sqrt{2})^2} = \frac{10(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{4\times 3-25\times 2} =$
$= \frac{10(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{-38} = \frac{10(-2\sqrt{3}+5\sqrt{2})}{38} = \frac{5(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{19} = \frac{25\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{19}$

- $\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{5}-2} = \frac{6\sqrt{7}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{6\sqrt{7}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{6\sqrt{7}(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 6\sqrt{35}+12\sqrt{7}$

21. Racionaliza o denominador de cada uma das frações seguintes e simplifica o mais possível a expressão obtida.

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{7}{2\sqrt{7}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{10}+2}$ **f)** $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

g) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

i) $\frac{12}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$ **j)** $\frac{10}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$

22. Simplifica o mais possível as expressões seguintes.

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}$

Potências de expoente racional

Seja a um número real positivo e seja $q = \frac{m}{n}$, onde m é um número inteiro e n é um número natural maior do que 1.

Define-se $a^{\frac{m}{n}}$ como sendo $\sqrt[n]{a^m}$.

Exemplos:

- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
- $3^{-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^2}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \times \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{3}$

As propriedades algébricas das potências mantêm-se, ou seja, dados números reais positivos a e b e números racionais p e q, tem-se:

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $a^p \times b^p = (a \times b)^p$
- $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
- $(a^p)^q = a^{p \times q}$

Tem-se, ainda, para qualquer número real positivo a e para qualquer número racional q:

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} = \left(\frac{1}{a}\right)^q$$

Exemplo:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

23. Escreve na forma de um radical cada uma das seguintes potências.

a) $3^{\frac{4}{7}}$ **b)** $5^{\frac{1}{2}}$ **c)** $2^{\frac{5}{9}}$ **d)** $4^{-\frac{1}{3}}$ **e)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

24. Indica o valor de cada uma das seguintes potências.

a) $25^{\frac{1}{2}}$ **b)** $8^{\frac{1}{3}}$ **c)** $4^{\frac{3}{2}}$ **d)** $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **e)** $\left(\frac{16}{81}\right)^{-1,5}$

25. Escreve na forma de potência de base 2 cada um dos seguintes radicais.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[5]{8}$ **d)** $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{1}{4^7}}$

26. Simplifica o mais possível as expressões. Apresenta o resultado na forma de um radical.

a) $2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ **b)** $6 \times 6^{-\frac{3}{5}}$ **c)** $\left(\sqrt[9]{3}\right)^4 \times 2^{\frac{4}{9}}$ **d)** $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ **e)** $\frac{15^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[8]{27}}$

27. Efetua as operações indicadas e apresenta o resultado na forma de potência.

$$\left[\left(\sqrt{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^p : \sqrt[4]{a^{2p-1}} \qquad (a \in \mathbb{R}^+;\ n, p \in \mathbb{N})$$

in Exame Nacional

28. Efetua as operações indicadas e apresenta o resultado na forma de radical.

$$\frac{\sqrt[3]{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{a^2b^{-1}}}{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[3]{a}}} \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

in Exame Nacional

Resolução de problemas

29. Um triângulo retângulo e isósceles tem área 8.

Determina o seu perímetro. Apresenta o resultado na forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e c números naturais e $b > 2$.

30. A área de um quadrado inscrito numa circunferência é 48.

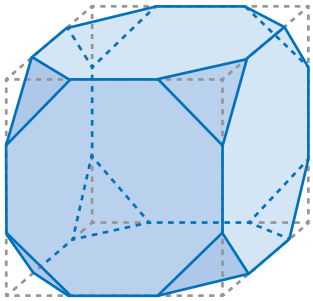
Determina o comprimento da circunferência. Apresenta o resultado na forma $a\sqrt{b}\pi$, com a e b números naturais e $a > 2$.

31. Seja E_1 a esfera inscrita num cubo e seja E_2 a esfera circunscrita a esse cubo. Sejam V_1 e V_2 os volumes das esferas E_1 e E_2, respetivamente.

a) Determina $\frac{V_2}{V_1}$. Apresenta o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com a e b números naturais e $a > 1$.

b) Admite que $V_2 - V_1 = 13\pi$. Prova que a aresta do cubo mede $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 3}$.

32. Na figura ao lado está representado um cubo truncado. Este poliedro obtém-se a partir de um cubo ao qual são «cortados» os vértices.
O cubo truncado tem faces triangulares e faces octogonais e as suas arestas são todas iguais. Cada face triangular é a secção produzida no cubo inicial por um plano que interseta três arestas que concorrem num mesmo vértice.

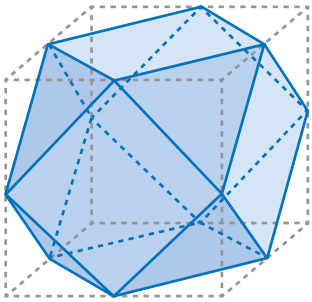


Considera que a aresta do cubo inicial mede 1.

a) Verifica que a aresta do cubo truncado mede $\sqrt{2} - 1$.

b) Determina o volume do cubo truncado. Apresenta o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b} - c}{d}$ com a, b, c e d números naturais.

33. Se seccionarmos um cubo por planos definidos pelos pontos médios das arestas que concorrem num mesmo vértice, obtemos um cuboctaedro.



a) Justifica que as arestas do cuboctaedro são todas iguais.

b) Determina a aresta do cubo inicial, sabendo que a área da superfície do cuboctaedro é $18 - 6\sqrt{3}$.

Agora já podes realizar...

5 + 5 | Teste 1

20 AULA DIGITAL ALUNO
www.mat10.te.pt

2. Polinómios

Noção de polinómio

Polinómio de grau n ($n \in \mathbb{N}_0$) na variável x é uma expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \text{ em que } a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } a_0 \neq 0$$

Têm-se as designações:

- os monómios a_0x^n, a_1x^{n-1}, ..., $a_{n-1}x$ e a_n designam-se por **termos** do polinómio;
- os números reais a_0, a_1, ..., a_{n-1} e a_n designam-se por **coeficientes** do polinómio;
- a_n diz-se **termo independente** ou termo de grau zero do polinómio.

Exemplos:

- $5x^3 + 3x^2 - 7x - 9$ é um polinómio de grau 3, cujos termos são $5x^3$, $3x^2$, $-7x$ e -9, cujos coeficientes são 5, 3, –7 e –9 e cujo termo independente é –9;
- $-x^4 + 2x^3 - 5x$ é um polinómio de grau 4, cujos termos são $-x^4$, $2x^3$, $0x^2$, $-5x$ e 0, cujos coeficientes são –1, 2, 0, –5 e 0 e cujo termo independente é 0;
- 8 é um polinómio de grau 0 (repare-se que $8 = 8x^0$) que tem apenas um termo (termo independente) e apenas um coeficiente (8).

Designa-se por **forma reduzida** de um polinómio, o polinómio que se obtém do polinómio dado adicionando algebricamente os termos semelhantes e eliminando os termos nulos. Se, por aplicação deste processo, não se obtiver qualquer termo, identifica-se a forma reduzida com 0 e designa-se o polinómio por **polinómio nulo**.

Exemplos:

- a forma reduzida do polinómio $6x^3 + 6x - 9x^3 - 7x^2 - 4x + 13x^2 - 5x + 7$ é $-3x^3 + 6x^2 - 3x + 7$;
- o polinómio $-3x^2 + 2x + 7x^2 - x + 3 - 4x^2 - x - 3$ é o polinómio nulo (0).

Diz-se que dois polinómios não nulos são **iguais** se e só se admitirem uma mesma forma reduzida.

34. Para cada um dos polinómios seguintes, indica o grau, os termos e os coeficientes.

a) $-\sqrt{3}x^4 + 3x^3 - \frac{4}{3}x - \pi$

b) $\frac{t^9}{6} + t^5 - \sqrt{2}t^2 + 10^{20}$

c) 10

35. Simplifica as expressões seguintes.

a) $2x^3 + 5x^3$

b) $4y^2 - 7y^2$

c) $3a^4 + \frac{a^4}{5}$

d) $\frac{2b^7}{3} - \frac{3b^7}{2}$

36. Simplifica cada uma das seguintes expressões, de modo a obteres um polinómio na forma reduzida.

a) $2x^3 - 3x^4 - \frac{1}{4}x^2 - 3x^4 + 6x^3 + 1 + \frac{3}{4}x^2 - 7 + x^5$

b) $2c^6 - \frac{4}{9}c^5 + 0{,}1c^4 - 7c^6 - \frac{1}{5}c^4 + \frac{2}{3}c^5$

37. Para cada um dos seguintes pares de polinómios, averigua se são iguais.

a) $2x^3 - 4x + 5x^4 - 1 - 2x^4 + 2x - 3x^4$ e $6x^2 - 1 + 2x^3 - x - 4x^2 - x - 2x^2$

b) $3x^3 + 2x^2 - 4x - 2x^3 + 5 - 3x^2$ e $5 - 6x^2 + 2x^3 - 3x - x^3 + 7x^2 - x$

Operações com polinómios

Recordemos, com exemplos, algumas operações com polinómios.

- $4 \times (-3x^6) = -12x^6$
- $2x^3 \times 5x^2 = 10x^5$
- $(4x^3)^2 = 16x^6$
- $(3x^2 - 7x + 1) + (-5x^3 - 3x^2 + 7x - 9) = 3x^2 - 7x + 1 - 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9 = -5x^3 - 8$
- $(3x^2 - 7x + 1) - (3x^2 - 6) = 3x^2 - 7x + 1 - 3x^2 + 6 = -7x + 7$
- $(x^2 - 3x + 2) \times (2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 2 = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Propriedade: o grau do produto de dois polinómios é igual à soma dos graus dos fatores.

38. Efetua as operações indicadas, reduzindo os termos semelhantes.

a) $(3x^2 + x - 4) + (-x^2 - 6x + 5)$

b) $\left(2x^3 + 3x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(-4x^2 - \frac{1}{6}\right)$

c) $\left(\frac{2}{5}x^3 + 4x^2 - x - \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{9}{10}x^3 - 4x + \frac{7}{6}\right)$

39. Efetua as multiplicações indicadas, reduzindo os termos semelhantes.

a) $2(3x - 4)$

b) $-3x(2x^2 - 5x - 9)$

c) $(5y - 7)(4y^2 + 6y - 8)$

40. Seja $P(x)$ um polinómio de grau 4.

Seja $Q(x)$ um polinómio de grau 3, tal que o termo de grau 3 tem coeficiente –2 e o termo de grau 2 tem coeficiente –1.

Seja $R(x)$ um polinómio de grau 3, tal que o termo de grau 3 tem coeficiente 2 e o termo de grau 2 tem coeficiente 0.

Indica o grau de cada um dos seguintes polinómios.

- $P(x) \times Q(x)$
- $P(x) + Q(x)$
- $Q(x) - R(x)$
- $P(x) \times R(x) + Q(x)$
- $Q(x) + R(x)$

Casos notáveis

Recordemos os casos notáveis da multiplicação de polinómios:

- $(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

41. Para cada uma das expressões indicadas, escreve uma equivalente que seja um polinómio na forma reduzida.

a) $(3 + 5x)^2$

b) $\left(\frac{x}{5} + 3\right)^2$

c) $\left(\frac{x^2}{4} + 6\right)^2$

d) $\left(\sqrt{2} + \frac{x^3}{2}\right)^2$

e) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}x\right)^2$

f) $(3x^2 + 2x)^2$

g) $(8 - x)^2$

h) $\left(\frac{x}{4} - 1\right)^2$

i) $\left(\frac{x^3}{2} - 4x\right)^2$

j) $(2 + 5x)(2 - 5x)$

k) $(x^2 - 8x)(x^2 + 8x)$

l) $\left(\frac{5x^2}{4} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7} + \frac{5x^2}{4}\right)$

42. Escreve na forma de quadrado de uma soma ou de uma diferença:

a) $x^2 + 8x + 16$

b) $4x^2 + 20x + 25$

c) $49x^2 + 14x + 1$

d) $x^2 - 20x + 100$

e) $25x^2 - 30x + 9$

f) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

43. Escreve na forma de produto de uma soma pela respetiva diferença:

a) $x^2 - 9$

b) $25 - x^2$

c) $16 - 49x^2$

d) $9x^2 - \frac{1}{4}$

e) $x^4 - 81$

f) $\frac{x^4}{4} - \frac{9}{25}$

Divisão inteira de polinómios

Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios (com $B(x)$ não nulo).

Efetuar a divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ é determinar um polinómio $Q(x)$ e um polinómio $R(x)$ tais que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, sendo $R(x)$ o polinómio nulo ou um polinómio de grau inferior ao grau de $B(x)$.

continua ▶

continuação

Em esquema:

$$\begin{array}{rr|l} \text{dividendo} \rightarrow & A(x) & B(x) \leftarrow \text{divisor} \\ \hline \text{resto} \rightarrow & R(x) & Q(x) \leftarrow \text{quociente} \end{array}$$

$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$

$R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$.

Se o resto for o polinómio nulo, diz-se que $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

Tem-se:

- **se o grau do divisor for superior ao do dividendo, o quociente é o polinómio nulo;**
- **se o grau do divisor não for superior ao do dividendo, o grau do quociente é a diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor;**
- **se o dividendo tiver grau maior ou igual a 1 e o divisor tiver grau 1, o resto é um número real.**

Exemplifica-se a seguir o algoritmo da divisão inteira de dois polinómios.

Vamos efetuar a divisão de $6x^3 - 20x^2 - 7x + 8$ por $x^2 - 3x - 1$.

1.º passo: colocar no quociente o monómio que multiplicado por x^2 dá $6x^3$.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} & 6x \end{array}$$

2.º passo: multiplicar $6x$ por cada termo do divisor, trocar o sinal ao produto e colocá-lo por baixo do termo do mesmo grau do dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 18x^2 + 6x & 6x \end{array}$$

3.º passo: adicionar o dividendo com o polinómio obtido no passo anterior.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 18x^2 + 6x & 6x \\ \hline -2x^2 - x + 8 & \end{array}$$

4.º passo: acrescentar ao quociente o monómio que multiplicado por x^2 dá $-2x^2$.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 18x^2 + 6x & 6x - 2 \\ \hline -2x^2 - x + 8 & \end{array}$$

5.º passo: multiplicar -2 por cada termo do divisor, trocar o sinal ao produto e colocá-lo por baixo do termo do mesmo grau do polinómio obtido no 3.º passo.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 18x^2 + 6x & 6x - 2 \\ \hline -2x^2 - x + 8 & \\ 2x^2 - 6x - 2 & \end{array}$$

6.º passo: adicionar o polinómio obtido no passo anterior com o polinómio que se encontra por cima dele.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 20x^2 - 7x + 8 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 18x^2 + 6x & 6x - 2 \\ \hline -2x^2 - x + 8 & \\ 2x^2 - 6x - 2 & \\ \hline -7x + 6 & \end{array}$$

Como $-7x + 6$ tem grau inferior ao divisor, a divisão está concluída.

O quociente é $6x - 2$ e o resto é $-7x + 6$.

44. Efetua, em cada uma das alíneas seguintes, a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$, apresentando o quociente e o resto.

a) $A(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5$ e $B(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $A(x) = 4x^3 + 4x^2 - 6$ e $B(x) = x - 3$

c) $A(x) = 8x^4 - 10x^2 + 2$ e $B(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

d) $A(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ e $B(x) = 6x^3 + 9x^2 - 18$

e) $A(x) = x^2 + 4x - 8$ e $B(x) = x^3 + 9x$

45. Sabe-se que, ao dividirmos um polinómio $M(x)$ por um polinómio $N(x)$, se obtém quociente $Q(x)$ e resto 2.

Qual é o quociente e o resto da divisão do polinómio $M(x)$ pelo polinómio $2N(x)$?

46. Para cada uma das alíneas seguintes, verifica que o polinómio $A(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)$ e escreve $A(x)$ na forma $B(x) \times Q(x)$.

a) $A(x) = 3x^2 - 5x - 2$ e $B(x) = 3x + 1$

b) $A(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ e $B(x) = x^2 - 2x + 2$

c) $A(x) = 2x^4 - x^3 - 4x - 3$ e $B(x) = x^2 - x - 1$

47. **a)** Verifica que $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

b) Se dividíssemos o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ por $x + 2$, qual seria o quociente? E qual seria o resto?

48. Seja $A(x)$ um polinómio de grau 4. Sabe-se que, ao dividir $A(x)$ por um polinómio $B(x)$, se obtém por quociente um polinómio de grau 3 e que o resto não é o polinómio nulo.

Indica o grau de $B(x)$ e o grau do resto.

49. Seja $P(x)$ um polinómio de grau superior a 1.

Seja $Q(x)$ o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$.

Sabendo que $P(2) = Q(2)$, prova que $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

50. Seja $P(x)$ um polinómio de grau maior ou igual a 2.

Seja $R(x)$ o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)$.

Sabendo que $P(2) = 7$ e que $P(3) = 5$, determina $R(x)$.

Regra de Ruffini

A regra de Ruffini é um algoritmo bastante prático para efetuar a divisão de dois polinómios quando o divisor é do tipo $x - a$ ($a \in \mathbb{R}$).

Exemplifica-se a seguir a regra de Ruffini.

Vamos efetuar a divisão de $3x^4 - 5x^2 - x + 8$ por $x - 2$.

1.º passo: construir um quadro como o exemplificado ao lado; na primeira linha, à direita do traço vertical, colocar os coeficientes do dividendo, ordenados por ordem decrescente dos graus dos respetivos termos; na segunda linha, à esquerda do traço vertical, colocar o valor de a.

2	3	0	−5	−1	8

2.º passo: copiar para a terceira linha o primeiro coeficiente do dividendo.

2	3	0	−5	−1	8
	3				

3.º passo: multiplicar o número que está à esquerda do traço vertical pelo número que se acabou de colocar na terceira linha e colocar o produto obtido na segunda linha.

2	3	0	−5	−1	8
		6			
	3				

4.º passo: adicionar o número que se acabou de colocar na segunda linha com o que se encontra por cima dele e colocar a soma obtida na terceira linha.

2	3	0	−5	−1	8
		6			
	3	6			

Vão-se repetindo os passos 3 e 4 até chegar ao fim do quadro.

2	3	0	−5	−1	8
		6	12	14	26
	3	6	7	13	34

O quociente é $3x^3 + 6x^2 + 7x + 13$ e o resto é 34.

Nota: se o divisor for, por exemplo, $x + 2$, tem-se $a = -2$, pois $x + 2 = x - (-2)$.

51. Utiliza a regra de Ruffini para, em cada uma das alíneas seguintes, efetuares a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$. Para cada caso, indica o quociente e o resto.

a) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 - 5x + 7$ e $B(x) = x - 3$

b) $A(x) = -3x^3 + 7x + 4$ e $B(x) = x + 1$

c) $A(x) = -4x^4 + 10x^2 + 25$ e $B(x) = x + 2$

d) $A(x) = x^5 + 1$ e $B(x) = x - 1$

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Exemplo:

O resto da divisão de $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ por $x + 3$ é $P(-3) = 27 + 27 - 15 - 6 = 33$.

52. Utiliza o teorema do resto para, em cada uma das alíneas seguintes, determinar o resto da divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$.

a) $A(x) = -x^3 - 10x + 4$ e $B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 10x$ e $B(x) = x + 2$

c) $A(x) = -4x^7 + 8x^5 - 5x^4 + 3x + 9$ e $B(x) = x - 1$

53. Para certos números reais a e b, os restos da divisão de $x^3 + 3x^2 + ax + b$ por $x - 1$ e $x - 2$ são 6 e 25, respetivamente. Determina a e b.

Raiz ou zero de um polinómio

Diz-se que um número real a é raiz ou zero de um polinómio $P(x)$ se $P(a) = 0$.

Exemplo:

2 é raiz ou zero do polinómio $5x^3 - 7x^2 - 8x + 4$ pois $5 \times 2^3 - 7 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = 0$.

Propriedade: um número real a é raiz ou zero de um polinómio $P(x)$ de grau $n \geqslant 1$ se e só se $P(x)$ for divisível por $x - a$, ou seja, se e só se existir um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Exemplo:

Como 2 é raiz do polinómio $5x^3 - 7x^2 - 8x + 4$, este polinómio é divisível por $x - 2$, isto é, existe um polinómio $Q(x)$ de grau 2 tal que $5x^3 - 7x^2 - 8x + 4 = (x - 2)Q(x)$.

Propriedade: dado um polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Exemplo:

O polinómio $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$ tem coeficientes inteiros; o seu termo independente, 9, é múltiplo de 3, que é a única raiz inteira do polinómio.

54. Verifica que –3, 0 e 2 são raízes do polinómio $x^3 + x^2 - 6x$.

55. Identifica quais dos elementos do conjunto $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ são raízes do polinómio $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

56. Verifica que –1 é uma raiz do polinómio $2x^4 - 3x - 5$ e utiliza esse facto para escreveres $2x^4 - 3x - 5$ como produto de um polinómio do primeiro grau por um do terceiro grau.

57. Sabe-se que $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinómios tais que $A(x) = (x + 5) \times (x - 2) \times B(x)$.

Indica duas raízes de $A(x)$.

58. Sabe-se que α e β são duas raízes distintas de um polinómio $P(x)$. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $x - \alpha$.

Justifica que β é uma raiz de $Q(x)$.

59. Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

Determina as raízes de $P(x)$, sabendo que são números inteiros.

60. Seja $P(x)$ um polinómio de coeficientes inteiros cujo termo independente é um número natural inferior a 20. Sabe-se que 8 é uma raiz de $P(x)$.

Indica os possíveis valores do termo independente de $P(x)$.

Raiz de multiplicidade *n* de um polinómio

Diz-se que o número real a é uma raiz de multiplicidade n de um polinómio $P(x)$ se n for o maior número natural para o qual existe um polinómio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - a)^n Q(x)$.

Uma raiz de multiplicidade 1 diz-se raiz simples.

Exemplo:

Seja $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$.

Tem-se $P(3) = 0$, pelo que 3 é uma raiz de $P(x)$. Portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 3$.

Façamos a divisão de $P(x)$ por $x - 3$ utilizando a regra de Ruffini.

	2	–11	12	9
3		6	–15	–9
	2	–5	–3	0

Tem-se, então, $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = (x - 3)(2x^2 - 5x - 3)$.

Tem-se também que 3 é raiz de $2x^2 - 5x - 3$, pelo que este polinómio também é divisível por $x - 3$.

Façamos a divisão de $2x^2 - 5x - 3$ por $x - 3$ utilizando a regra de Ruffini.

	2	–5	–3
3		6	3
	2	1	0

Tem-se, então, $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$.

Portanto, $P(x) = (x - 3)(2x^2 - 5x - 3) = (x - 3)(x - 3)(2x + 1) = (x - 3)^2(2x + 1)$.

Como 3 não é raiz de $2x + 1$, concluímos que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla) de $P(x)$.

61. Mostra que –3 é uma raiz simples do polinómio $4x^3 + 12x^2 - x - 3$.

62. Verifica que 1 é uma raiz do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$ e determina a sua multiplicidade.

Fatorização de polinómios

Para decompor um polinómio em fatores, podemos colocar em evidência fatores comuns e utilizar os casos notáveis da multiplicação de polinómios.

Exemplos:

- $4x^3 - 7x^2 + 3x = x(4x^2 - 7x + 3)$
- $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$
- $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$
- $2x^2 + 20x + 50 = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$
- $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$

Para decompor um polinómio em fatores, também podemos utilizar as suas raízes.

Dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \geqslant 1$, cujas raízes (distintas) $x_1, \ldots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, \ldots, n_k$, tem-se que:

- $n_1 + \ldots + n_k \leqslant n$;
- **existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} \ldots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$;**
- $n_1 + \ldots + n_k = n$ **se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero, ou seja, for um número real, o qual é o coeficiente do termo de maior grau do polinómio $P(x)$.**

Exemplo:

O polinómio $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36$ tem uma raiz dupla, -2, e duas raízes simples, -3 e 3. Portanto, $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36 = (x + 2)^2(x + 3)(x - 3)$.

63. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $70x^2 + 35x$ **b)** $-4x^2 + 100x$ **c)** $100 - x^2$

d) $x^2 + 10x + 25$ **e)** $9x^2 + 6x + 1$ **f)** $2x^3 - 4x^2 + 2x$

g) $x - x^3$ **h)** $x^6 - 25x^4$

64. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $x^2 + x - 12$ **b)** $-5x^2 - 10x + 15$ **c)** $2x^2 - 5x + 2$

65. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, sabendo que 1 é raiz de $A(x)$.

b) $B(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 50$, sabendo que -2 é raiz de $B(x)$.

c) $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, sabendo que 2 é raiz de $C(x)$.

d) $D(x) = 3x^3 + 6x^2 - 21x + 12$, sabendo que 1 é raiz de $D(x)$.

66. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $A(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x$, sabendo que 1 é raiz de $A(x)$.

b) $B(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$, sabendo que -1 e 3 são raízes de $B(x)$.

c) $C(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, sabendo que 2 é raiz dupla de $C(x)$.

d) $D(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Exercícios globais

67. Para certos números reais a e b, $ax^3 + bx^2 - 7x + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$.
Determina a e b.

68. Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 números inteiros.
Considera o polinómio $p(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

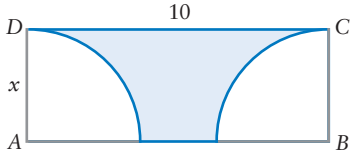
a) Se o polinómio $p(x)$ tiver quatro raízes inteiras, justifica que o seu produto é igual a a_4.

b) Justifica que, se a_4 for um número primo, então o polinómio $p(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

69. Seja $p(x)$ um polinómio de grau n $(n > 2)$. Sabe-se que a é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$, com m número natural par. Seja $q(x)$ o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x - a)^m$.
Determina, em função de a, duas raízes do polinómio $p(x) - q(x)$.

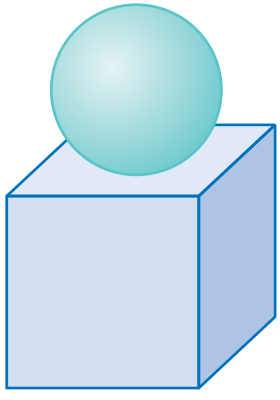
70. Na figura ao lado estão representados:

- um retângulo de comprimento 10 e largura x $(0 < x < 5)$;
- dois quartos de círculo de raio x e cujos centros são os pontos A e B.



O perímetro da região colorida é dado por um polinómio $p(x)$.
Determina $p(x)$ na forma reduzida.

71. Na figura ao lado está representado um projeto de uma escultura para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo. Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros.
Seja x o raio da esfera, em metros $(0 < x < 1)$. Mostra que o volume total, em metros cúbicos, da escultura é dado por $p(x) = \frac{4\pi - 24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8$.



Adaptado de Exame Nacional

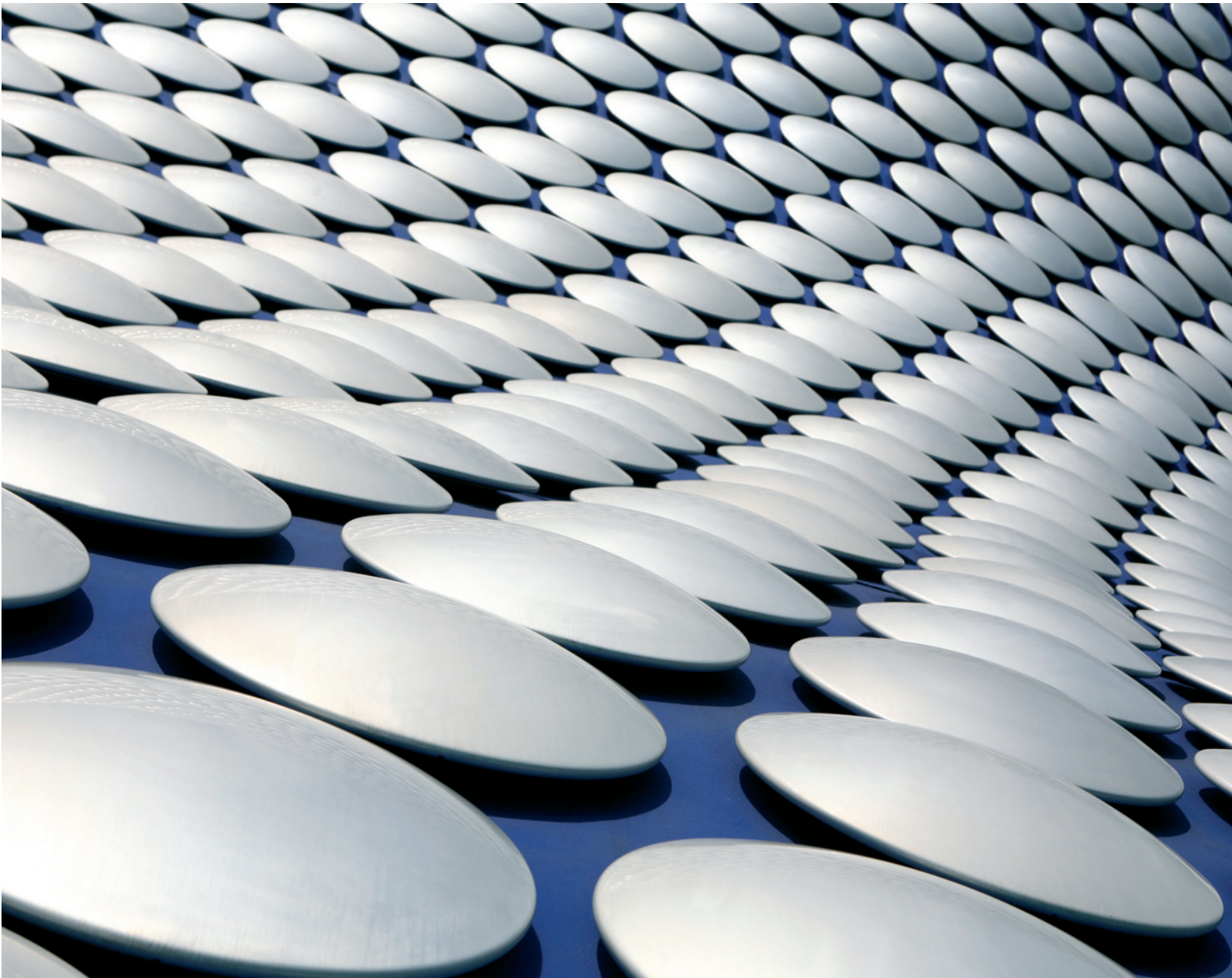
72. Uma pirâmide quadrangular tem altura 8 e a aresta da base é $6\sqrt{2}$.
Fez-se um corte por um plano paralelo à base, tendo a pirâmide ficado decomposta num tronco de pirâmide de altura x e numa nova pirâmide.

a) Prova que o volume desta nova pirâmide é dado por $p(x) = -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192$.

b) Sem efetuar cálculos, justifica que o volume da pirâmide inicial é o termo independente de $p(x)$.

Tema 3

Geometria Analítica



1. Geometria analítica no plano

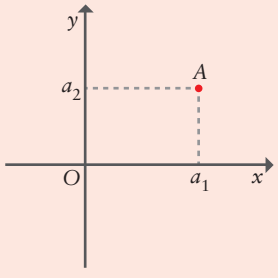
Referencial ortonormado

Dado um plano munido de um referencial, diz-se que:

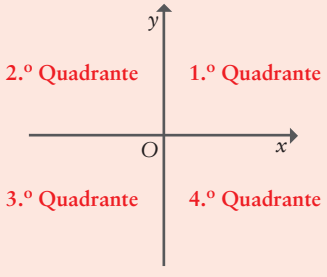
- **o referencial é ortogonal se os eixos forem perpendiculares;**
- **o referencial é monométrico se tiver sido fixada a mesma unidade de comprimento para os dois eixos;**
- **o referencial é ortonormado se for ortogonal e monométrico, sendo a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincidente com uma unidade de comprimento pré-fixada.**

Abrevia-se muitas vezes a designação «ortonormado» escrevendo simplesmente «o.n.»

Dado um plano munido de um referencial o.n. xOy e dados números reais a_1 e a_2, designa-se por $A(a_1, a_2)$ o ponto de abcissa a_1 e ordenada a_2.

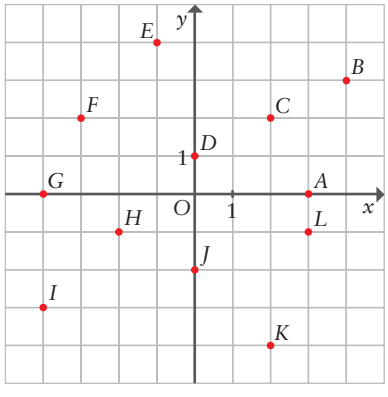


Os eixos do referencial dividem o plano em quatro regiões, que se designam por quadrantes.



1. **a)** Na figura ao lado estão assinalados alguns pontos num referencial o.n. xOy. Escreve as coordenadas desses pontos.

b) Desenha um referencial o.n. xOy e assinala nesse referencial os pontos $L(-3, 0)$, $M(-4, -5)$, $N(-1, -1)$, $O(0, 0)$, $P\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$, $Q(0, -3)$, $R\left(\frac{7}{2}, 1\right)$, $S(4, -2)$, $T(1, 0)$ e $U\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

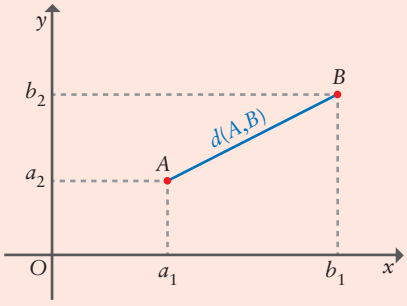


2. Considera, num referencial o.n. xOy, um retângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e perímetro 20. Um dos vértices do retângulo é o ponto $A(2, 1)$.

Sabendo que o retângulo tem dois vértices no quarto quadrante e que um deles tem abcissa 9, qual é a ordenada desse vértice?

Distância entre dois pontos

Dado um plano munido de um referencial ortonormado e dados dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, designa-se por $d(A, B)$ a medida da distância entre os pontos A e B.



Tem-se $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Exemplo:

A distância entre $A(4, -7)$ e $B(-2, 1)$ é

$$\sqrt{(-2-4)^2 + [1-(-7)]^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

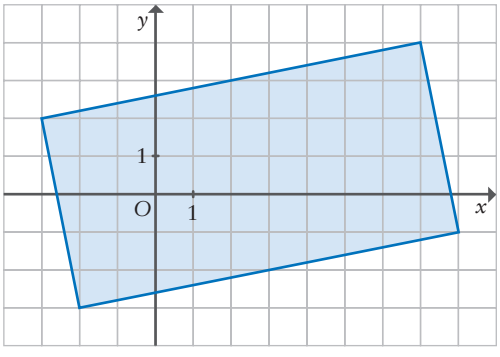
3. Determina a distância entre cada um dos seguintes pares de pontos, num referencial o.n. xOy.

a) $A(2, 3)$ e $B(7, 15)$

b) $C(-2, 1)$ e $D(1, -3)$

c) $E\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e $F(2, 1)$

4. Na figura seguinte está representado um retângulo, em referencial o.n. xOy.
Determina a área do retângulo.



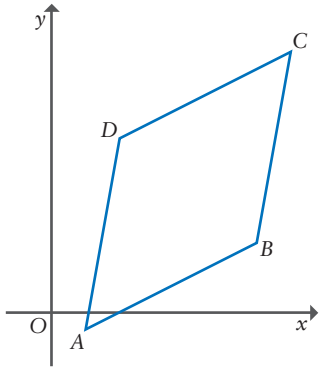
5. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, um quadrilátero $[ABCD]$.

Tem-se que as coordenadas dos quatro vértices são:

- $A(2, -1)$
- $B(12, 4)$
- $C(14, 15)$
- $D(4, 10)$

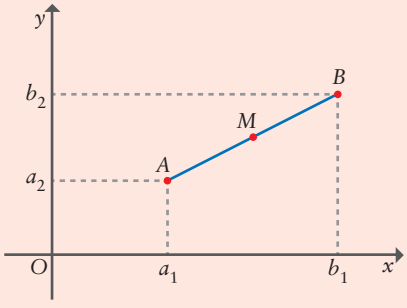
a) Mostra que este quadrilátero é um losango.

b) Determina a área do quadrilátero.



Ponto médio de um segmento de reta

Dado um plano munido de um referencial ortonormado e dados dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.



Tem-se que as coordenadas do ponto M são $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Exemplo:

Sendo $A(4, -7)$ e $B(-2, 1)$, o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas $\left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-7 + 1}{2}\right) = (1, -3)$.

6. Cada um dos seguintes pares de pontos define, num referencial o.n. xOy, um segmento de reta.

Para cada caso, determina o ponto médio do segmento de reta.

a) $A(2, 3)$ e $B(8, 17)$

b) $C(-2, 1)$ e $D(0, -7)$

c) $E\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $F\left(\frac{9}{2}, \sqrt{18}\right)$

7. No teu caderno, desenha um referencial o.n. xOy.

Considera, nesse referencial, a circunferência de diâmetro $[AB]$, sendo $A(-1, -3)$ e $B(5, 5)$.

a) Determina as coordenadas do centro da circunferência.

b) Determina o comprimento da circunferência.

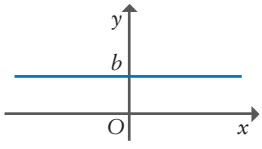
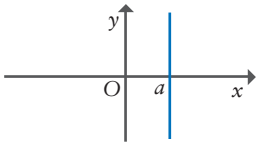
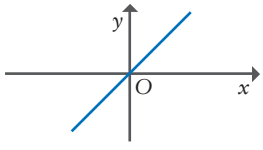
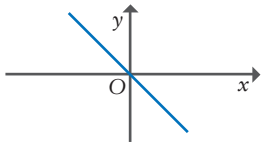
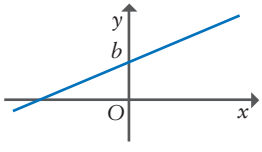
8. Sejam, num referencial o.n. xOy, dois pontos, A e B.

Sabe-se que:

- a abcissa de B é igual à ordenada de A;
- a ordenada de B é igual ao triplo da abcissa de A;
- o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas $(4, 9)$.

Determina as coordenadas do ponto A.

Reta

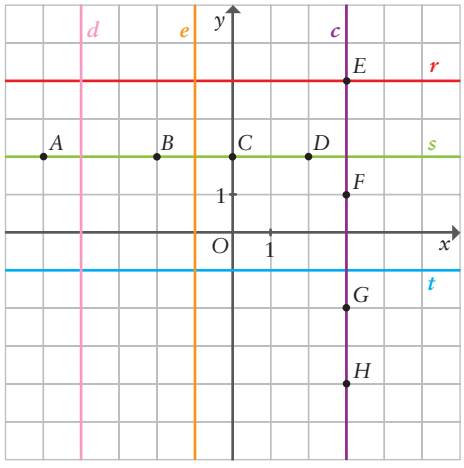
Descrição	Representação geométrica	Equação
Reta paralela ao eixo Ox e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada b.		$y = b$
Reta paralela ao eixo Oy e que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa a.		$x = a$
Reta que é união das bissetrizes dos quadrantes ímpares (habitualmente designada por bissetriz dos quadrantes ímpares).		$y = x$
Reta que é união das bissetrizes dos quadrantes pares (habitualmente designada por bissetriz dos quadrantes pares).		$y = -x$
Reta de declive m e ordenada na origem b.		$y = mx + b$

À equação $y = mx + b$ dá-se o nome de **equação reduzida de uma reta não vertical.**

O declive de uma reta não vertical que passa nos pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ é $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$.

9. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o.n. xOy, seis retas paralelas aos eixos coordenados:

- três retas horizontais: r, s e t;
- três retas verticais: c, d e e.



a) Indica as coordenadas dos pontos A, B, C e D da reta s e escreve uma equação que defina a reta s.

b) Escreve uma equação que defina a reta r e uma equação que defina a reta t.

c) Representa no teu caderno, num referencial o.n. xOy, as retas definidas pelas equações:

- $y = -2$
- $y = \frac{1}{2}$

d) Indica as coordenadas dos pontos E, F, G e H da reta c e escreve uma equação que defina a reta c.

e) Escreve uma equação que defina a reta d e uma equação que defina a reta e.

f) Representa no teu caderno, num referencial o.n. xOy, as retas definidas pelas equações:

- $x = -8$
- $x = -\frac{7}{2}$
- $x = \frac{1}{2}$

10. Para cada uma das seguintes retas, escreve a equação reduzida.

a) Reta que tem declive 2 e passa no ponto $A(0, -1)$.

b) Reta que tem declive 3 e passa no ponto $B(1, 7)$.

c) Reta que passa nos pontos $C(1, -3)$ e $D(-4, 2)$.

d) Reta com ordenada na origem $b = -1$ e que passa no ponto $E(4, 0)$.

e) Reta que passa na origem e no ponto $F\left(\frac{2}{3}, -2\right)$.

f) Bissetriz dos quadrantes ímpares.

g) Bissetriz dos quadrantes pares.

11. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r definida pela equação $y = 2x + 4$.

a) Indica a ordenada do ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

b) Determina a abcissa do ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

c) Tendo em conta as alíneas anteriores, desenha, no teu caderno, a reta r.

d) Da observação do desenho:

d_1) qual parece ser a ordenada do ponto da reta cuja abcissa é 3?

d_2) qual parece ser a abcissa do ponto da reta cuja ordenada é –2?

e) Confirma analiticamente os valores observados nas alíneas d_1) e d_2).

12. Considera, em referencial o.n. xOy :

- a reta r definida pela equação $y = 3x + 1$;
- a reta s definida pela equação $y = -2x + 11$.

a) Determina as coordenadas de dois pontos da reta r (por exemplo: atribui dois valores a x e determina os correspondentes valores de y).

b) Determina as coordenadas de dois pontos da reta s .

c) Tendo em conta as alíneas anteriores, desenha, no teu caderno, as retas r e s .

d) Da observação do desenho, quais parecem ser as coordenadas do ponto de interseção das duas retas?

e) Confirma analiticamente o resultado da alínea anterior.

13. Considera, em referencial o.n. xOy :

- a reta r definida pela equação $y = 1$;
- a reta s definida pela equação $x = 7$;
- a reta t definida pela equação $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

a) Desenha, no teu caderno, as retas r , s e t .

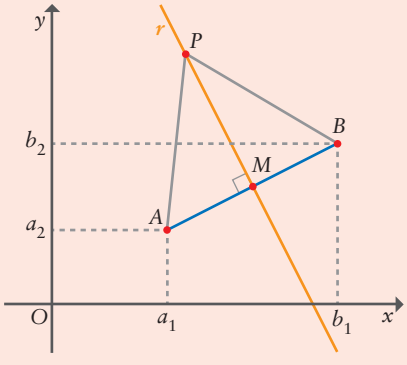
b) Determina analiticamente as coordenadas dos vértices do triângulo limitado pelas retas r , s e t .

c) Determina a área e o perímetro desse triângulo.

Mediatriz de um segmento de reta

Dado um plano munido de um referencial ortonormado e dados dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, seja r a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ (reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio).

A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(A, P) = d(B, P)$.



Exemplos:

- Sejam $A(-2, 1)$ e $B(6, 1)$.

  O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox , pelo que a mediatriz deste segmento é paralela ao eixo Oy . Como o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é $M(2, 1)$, uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $x = 2$.

continua ▶

continuação

- Sejam $A(4, 1)$ e $B(4, -7)$.

  O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy, pelo que a mediatriz deste segmento é paralela ao eixo Ox. Como o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é $M(4, -3)$, uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = -3$.

- Sejam $A(-2, 1)$ e $B(4, -7)$.

  A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que $d(A, P) = d(B, P)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} d(A, P) = d(B, P) &\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+7)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 1 = -8x + 16 + 14y + 49 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2y - 14y = -8x - 4x + 65 - 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -16y = -12x + 60 \Leftrightarrow y = \frac{12}{16}x - \frac{60}{16} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \end{aligned}$$

14. Para cada um dos pares de pontos A e B indicados, desenha, em referencial o.n. xOy, o segmento de reta $[AB]$, constrói a mediatriz desse segmento de reta e determina a sua equação reduzida.

a) $A(-1, 1)$ e $B(-1, 5)$ **b)** $A(-2, 1)$ e $B(4, 5)$ **c)** $A(2, -3)$ e $B(-6, 7)$

15. Considera, em referencial o.n. xOy, os pontos $A(-2, -2)$, $B(4, -2)$ e $C(5, 5)$.

a) Desenha o triângulo $[ABC]$.

b) Determina, por meio de uma construção geométrica adequada, o circuncentro do triângulo $[ABC]$ (ponto de interseção das mediatrizes dos lados).

c) Confirma analiticamente o resultado obtido na alínea anterior.

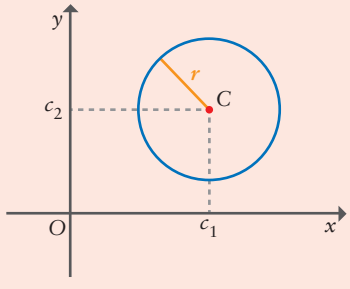
Circunferência

Dados um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $C(c_1, c_2)$ desse plano e um número real positivo r, a equação

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

é uma equação cartesiana da circunferência de centro no ponto C e raio r.

Designa-se esta equação por equação reduzida da circunferência.



continua

continuação

Círculo

A inequação $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 \leqslant r^2$ define o círculo de centro no ponto C e raio r.

Exemplos:

- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ é a equação reduzida da circunferência de centro em $C(2, -3)$ e raio 5;
- $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ é a equação reduzida da circunferência de centro em $C(1, 0)$ e raio $\sqrt{2}$;
- $x^2 + y^2 = 9$ é a equação reduzida da circunferência de centro na origem do referencial e raio 3;
- tem-se:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 11 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y = 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 11 + 9 + 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

  pelo que $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 11$ é uma equação da circunferência de centro em $C(3, -4)$ e raio 6;
- $x^2 + (y + 3)^2 \leqslant 16$ define o círculo de centro em $C(0, -3)$ e raio 4;
- $x^2 + (y + 3)^2 < 16$ define o interior do círculo de centro em $C(0, -3)$ e raio 4;
- $x^2 + (y + 3)^2 > 16$ define o exterior do círculo de centro em $C(0, -3)$ e raio 4.

16. Escreve a equação reduzida de cada uma das seguintes circunferências.

a) Centro no ponto $C(-2, 1)$ e raio 3.

b) Centro no ponto $C(0, -1)$ e raio 4.

c) Centro no ponto $C(3, 0)$ e raio 2.

d) Centro na origem e raio 1.

e) Centro no ponto $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$ e raio $\sqrt{2}$.

f) Diâmetro $[AB]$, sendo $A(1, 4)$ e $B(7, 6)$.

17. Indica o centro e o raio de cada uma das circunferências definidas pelas equações seguintes.

a) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 36$

b) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 12$

c) $x^2 + (y + 3)^2 = 1$

d) $x^2 + y^2 = 5$

18. No teu caderno, desenha um referencial o.n. xOy, tomando para unidade o lado de uma quadrícula.

Nesse referencial, desenha a circunferência de centro no ponto $C(-2, 1)$ e raio 5.

Escreve uma equação dessa circunferência e mostra que ela é equivalente a

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

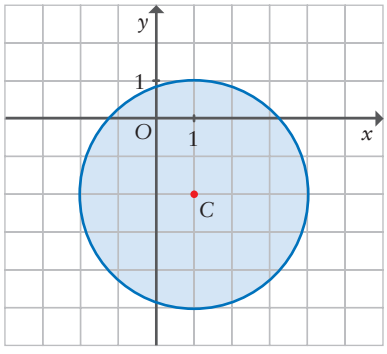
19. Determina o centro e o raio de cada uma das circunferências definidas pelas equações seguintes.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 8y$

20. Determina analiticamente os pontos de interseção da reta de equação $y = 2x + 3$ com a circunferência de centro $C(-4, 10)$ e raio $5\sqrt{2}$.

21. Na figura ao lado está representado o círculo de centro em $C(1, -2)$ e raio 3.



a) Escreve uma equação da circunferência que limita o círculo.

b) Completa, de forma a obteres uma proposição verdadeira:

«A distância de qualquer ponto P do círculo ao ponto C é sempre inferior ou igual a ____.»

22. Define analiticamente cada uma das seguintes regiões do plano.

a) Círculo de centro em $C(3, -2)$ e raio 6.

b) Círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

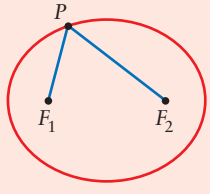
c) Exterior do círculo de centro em $C(-2, 5)$ e raio 4.

d) Interior do círculo de centro em $C(2, 0)$ e raio 3.

23. Determina a área da região do plano definida pela condição $x^2 + (y - 5)^2 \leqslant 7$.

Elipse

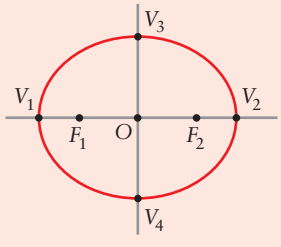
Dados dois pontos F_1 e F_2 de um plano onde se fixou uma unidade de comprimento, chama-se elipse ao lugar geométrico dos pontos P desse plano tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é constante, sendo essa constante maior do que $\overline{F_1F_2}$.



Aos pontos F_1 e F_2 dá-se o nome de focos.

A elipse tem dois eixos de simetria:

- **a reta que passa pelos focos F_1 e F_2;**
- **a mediatriz do segmento de reta $[F_1F_2]$.**



Ao ponto de interseção dos eixos de simetria dá-se o nome de centro (O).

Aos pontos de interseção da elipse com os eixos de simetria dá-se o nome de vértices (V_1, V_2, V_3 e V_4).

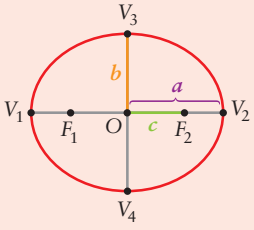
continua ▶

continuação

Ao segmento de reta $[V_1V_2]$, bem como ao seu comprimento $(2a)$, dá-se o nome de **eixo maior** (a é o semieixo maior).

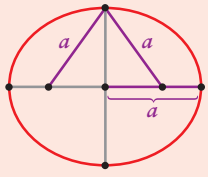
Ao segmento de reta $[V_3V_4]$, bem como ao seu comprimento $(2b)$, dá-se o nome de **eixo menor** (b é o semieixo menor).

À distância entre os focos $(2c)$ dá-se o nome de **distância focal** (c é a semidistância focal).

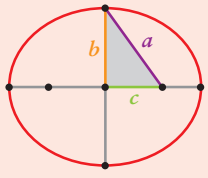


Definiu-se elipse como o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é constante. Prova-se que essa constante é igual ao eixo maior $\left(\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\right)$.

Daqui resulta que a distância de qualquer dos vértices que são extremos do eixo menor a cada foco é igual a a.

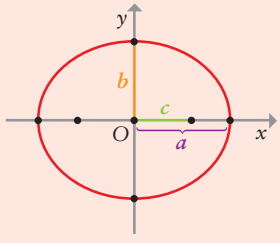


Do teorema de Pitágoras resulta que $a^2 = b^2 + c^2$.



Considerando um referencial o.n., em que os eixos coordenados contêm os eixos de simetria da elipse, estando os focos no eixo das abcissas, tem-se que uma equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Designa-se esta condição por **equação reduzida da elipse**.

Exemplo:

Na equação $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ tem-se $a^2 = 169$ e $b^2 = 25$.

Tem-se $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144$. Portanto, $a = 13$, $b = 5$ e $c = 12$.

Trata-se, assim, da elipse de centro na origem do referencial, com focos de coordenadas $(12, 0)$ e $(-12, 0)$ e cujos eixos maior e menor medem respetivamente 26 e 10.

24. Para cada uma das elipses cujas equações reduzidas são apresentadas a seguir, determina o eixo maior, o eixo menor, a distância focal, as coordenadas dos focos e as coordenadas dos vértices.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

d) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

25. Determina a equação reduzida de cada uma das seguintes elipses.

a) Centro na origem, focos no eixo das abcissas, eixo maior igual a 6 e eixo menor igual a 4.

b) Vértices de coordenadas $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$.

c) Focos de coordenadas $(12, 0)$ e $(-12, 0)$ e um dos vértices é o ponto de coordenadas $(0, 5)$.

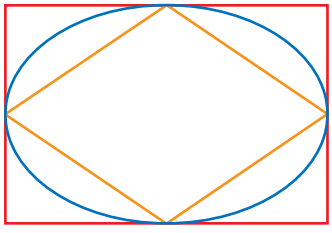
d) Focos de coordenadas $(5, 0)$ e $(-5, 0)$ e um dos vértices é o ponto de coordenadas $(-7, 0)$.

e) Focos de coordenadas $(6, 0)$ e $(-6, 0)$ e que passa no ponto de coordenadas $(6, 5)$.

f) Focos de coordenadas $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ e inscrita num retângulo de perímetro 36.

g) Centro na origem, focos no eixo das abcissas, eixo maior igual ao dobro do eixo menor e que passa no ponto de coordenadas $(6, 4)$.

26. Na figura seguinte está representada uma elipse inscrita num retângulo e um losango cujos vértices coincidem com os vértices da elipse.



O retângulo tem área 24 e o losango tem perímetro $\sqrt{208}$.

Qual é a distância entre os focos da elipse?

27. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Esta reta passa por dois vértices de uma elipse de centro na origem do referencial e cujos focos pertencem ao eixo das abcissas.

Determina a equação reduzida da elipse.

28. Considera, em referencial o.n. xOy, a elipse de equação $x^2 + 3y^2 = 6$.

a) Determina a equação reduzida da elipse.

b) Seja F o foco da elipse cuja abcissa é positiva. Determina as coordenadas do ponto F.

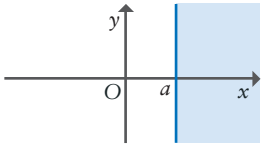
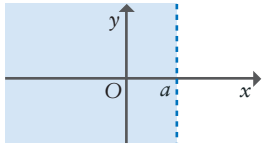
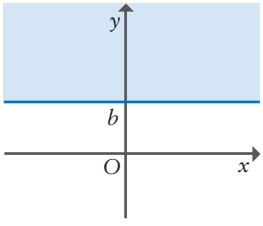
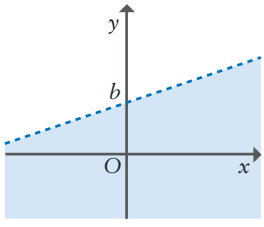
c) Seja r a reta de equação $x = 3$. Seja P um ponto qualquer da elipse. Seja $d(P, r)$ a distância do ponto P à reta r. Seja $d(P, F)$ a distância do ponto P ao foco F.

Mostra que $\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

29. Considera um triângulo equilátro $[ABC]$ de lado l. Os pontos A e B são os focos de uma elipse que passa por C. Seja D o ponto de interseção da elipse com a semirreta $\dot{A}B$.

Mostra que o triângulo $[ACD]$ tem área $\frac{3\sqrt{3}}{8} l^2$.

Semiplanos

Descrição	Representação geométrica	Inequação
Semiplano fechado à direita da reta de equação $x = a$.		$x \geqslant a$
Semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x = a$.		$x < a$
Semiplano fechado superior à reta de equação $y = b$.		$y \geqslant b$
Semiplano aberto inferior à reta de equação $y = mx + b$.		$y < mx + b$

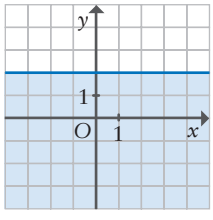
30. Num referencial o.n. xOy do plano, representa o conjunto de pontos definido por cada uma das seguintes condições.

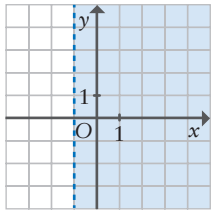
a) $y \geqslant 2 \wedge x \leqslant 4 \wedge (x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 9$

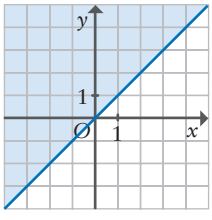
b) $1 \leqslant (x+2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4 \vee (-4 \leqslant x \leqslant 0 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 1)$

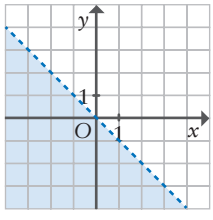
31. Na figura seguinte estão representados, em referencial o.n. xOy, quatro semiplanos, uns abertos e outros fechados. Os semiplanos estão coloridos.

Indica, para cada semiplano, uma condição que o defina.

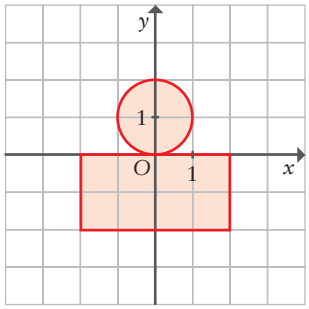
a)


b)


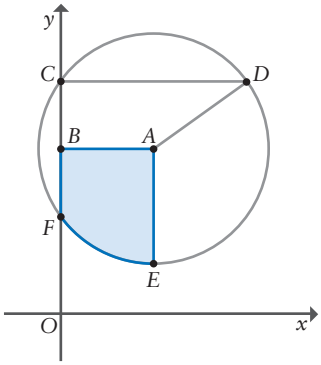
c)


d)


32. Escreve uma condição que defina o domínio plano representado no referencial o.n. xOy da figura seguinte.



33. Na figura seguinte está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência que tem centro no ponto $A(4, 7)$ e que passa pelo ponto $D(8, 10)$.



Sabe-se que:

- $[CF]$ é a corda da circunferência contida no eixo Oy;
- $[CD]$ é uma corda da circunferência paralela ao eixo Ox;
- $[AE]$ é um raio da circunferência paralelo ao eixo Oy;
- $[ABCD]$ é um trapézio retângulo.

a) Determina a área do trapézio $[ABCD]$.

b) Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento $[AD]$.

c) Mostra que o raio da circunferência é igual a 5.

d) Define, por uma condição, a região colorida, incluindo a fronteira.

Agora já podes realizar...

5 + 5 | Teste 2

20 AULA DIGITAL ALUNO

www.mat10.te.pt

2. Cálculo vetorial no plano

Vetores

Segmentos orientados com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento definem o mesmo **vetor**.

Segmentos orientados de extremos iguais (ou seja, ponto de aplicação e ponto extremidade coincidentes) definem o vetor nulo $(\vec{0})$.

Dado um vetor $\vec{v}$, designa-se por **norma** de $\vec{v}$ a medida do comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. A norma de $\vec{v}$ representa-se por $\|\vec{v}\|$.

A norma do vetor nulo é zero.

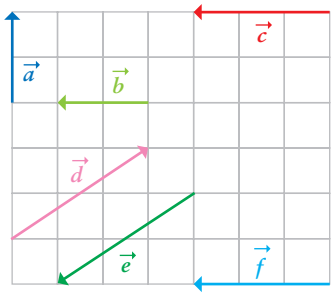
Vetores não nulos com a mesma direção dizem-se **colineares**.

Vetores colineares e com a mesma norma, mas de sentidos contrários, dizem-se **simétricos**. O simétrico de $\vec{v}$ designa-se por $-\vec{v}$.

Convenciona-se que:

- o vetor nulo é colinear com qualquer vetor;
- o vetor nulo é simétrico de si próprio.

34. Observa a figura seguinte e preenche a tabela.

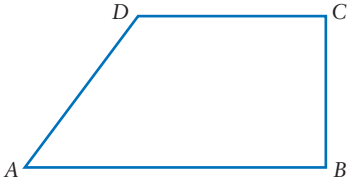


Vetores	Mesma direção?	Mesmo sentido?	Mesma norma?	Iguais?
$\vec{a}$ e $\vec{b}$	não			
$\vec{b}$ e $\vec{c}$				
$\vec{d}$ e $\vec{e}$				
$\vec{c}$ e $\vec{f}$				

a) Tomando para unidade de comprimento o lado de uma quadrícula, indica $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{c}\|$.

b) Indica um par de vetores simétricos.

35. Na figura ao lado está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$.



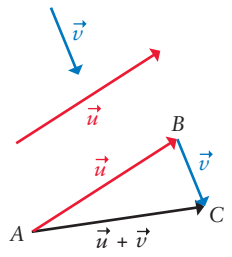
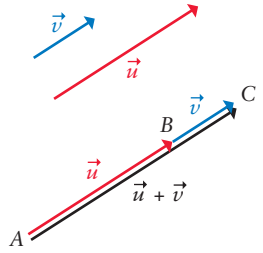
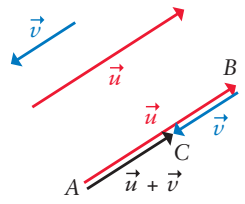
Sabe-se que $\overline{AD} = \overline{CD} = 5$ e que $\overline{BC} = 4$.

a) Utilizando as letras da figura, indica um par de vetores colineares.

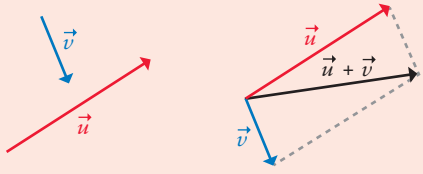
b) Determina $\|\overrightarrow{AC}\|$.

Adição de vetores

Para adicionar dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos considerar três pontos, A, B e C, tais que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, tendo-se então $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
		

Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não forem colineares, também se pode obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$ através da «regra do paralelogramo», como se ilustra na figura ao lado.

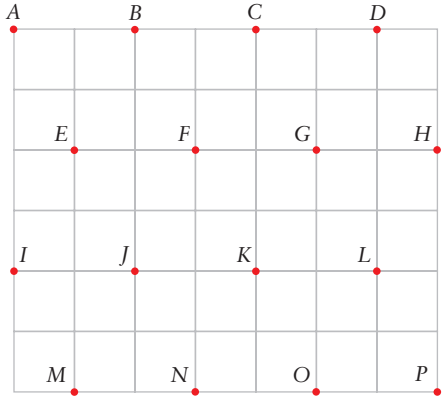


Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (propriedade comutativa)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (propriedade associativa)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ é elemento neutro)
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (a soma de um vetor com o seu simétrico é o vetor nulo)

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, define-se $\vec{u} - \vec{v}$ da seguinte forma: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

36. Utilizando as letras da figura ao lado, indica os resultados de cada uma das seguintes operações.



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{OG}$ c) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KG}$

d) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{LD}$ e) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EJ}$ f) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{EF}$

g) $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{GD}$ h) $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{JL}$ i) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$

j) $\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{OK}$ k) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{KG}$ l) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{CD}$

37. Completa as seguintes frases.

a) «Quaisquer que sejam os pontos A, B e C, tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ = _____.»

b) «Quaisquer que sejam os pontos A, B, C e D, tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ = _____.»

c) «Quaisquer que sejam os pontos A e B, tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ = _____.»

Produto de um vetor por um número real (escalar)

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real λ, o produto de $\vec{v}$ por λ representa-se por $\lambda\vec{v}$.

Tem-se:

- se $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\lambda\vec{v} = \vec{0}$;
- se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\lambda\vec{v}$ é o vetor que tem:
  - a mesma direção de $\vec{v}$;
  - o mesmo sentido de $\vec{v}$, se $\lambda > 0$, e sentido contrário ao de $\vec{v}$, se $\lambda < 0$;
  - norma igual a $|\lambda|\,\|\vec{v}\|$.

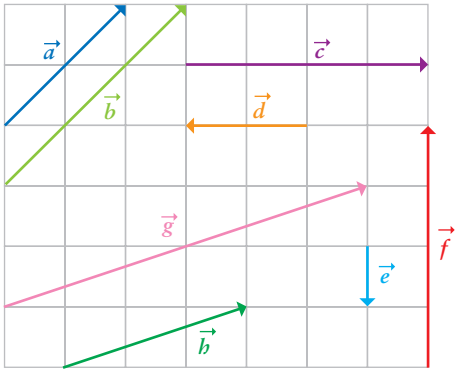
Exemplos:

Propriedades ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e λ e μ escalares):

1. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (propriedade distributiva)
2. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ (propriedade distributiva)
3. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
4. $1\vec{v} = \vec{v}$

Dado um vetor $\vec{u}$ não nulo, um vetor $\vec{v}$ é **colinear** com $\vec{u}$ se e só se existe um número real λ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Caso exista, este número real é único.

38. Observa a figura seguinte e completa.



$\vec{a}$ = _____ $\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{b}$ = _____ $\vec{a}$

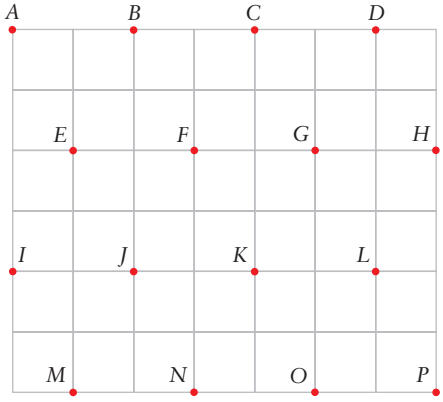
$\vec{c}$ = _____ $\vec{d}$ $\qquad$ $\vec{d}$ = _____ $\vec{c}$

$\vec{f}$ = _____ $\vec{e}$ $\qquad$ $\vec{e}$ = _____ $\vec{f}$

$\vec{g}$ = _____ $\vec{h}$ $\qquad$ $\vec{h}$ = _____ $\vec{g}$

39. Utilizando as letras da figura, indica o resultado de cada uma das seguintes operações.

a) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$ **b)** $\frac{1}{3}\overrightarrow{LI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$ **c)** $\frac{2}{3}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{KG}$ **d)** $\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$



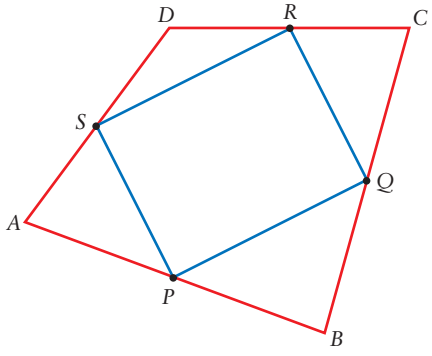
40. Completa as seguintes frases:

a) «Quaisquer que sejam os pontos A e B, tem-se sempre: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} =$ _____ .»

b) «Quaisquer que sejam os pontos A, B e C, tem-se sempre: $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} =$ _____ .»

41. Seja $[ABCD]$ um quadrilátero.

Sejam P, Q, R e S os pontos médios dos lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$, respetivamente.



Prova que o quadrilátero $[PQRS]$ é um paralelogramo.

Sugestão: tendo em conta que $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ}$, prova que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e, de modo análogo, prova que $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

42. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores colineares.

Prova que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ também são colineares.

Coordenadas de um vetor

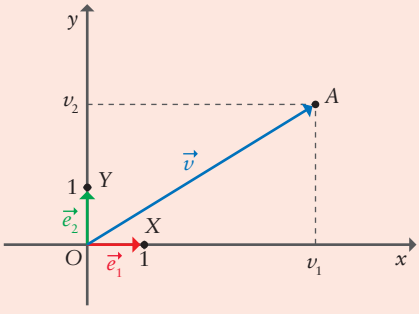
Dado um plano onde está instalado um referencial o.n. xOy, sejam os pontos $X(1, 0)$ e $Y(0, 1)$ e os vetores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ tais que $\vec{e_1} = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e_2} = \overrightarrow{OY}$.

Dado um qualquer $\vec{v}$ do plano, existe um e um só par ordenado de números reais (v_1, v_2) tal que $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}$. Diz-se que (v_1, v_2) são as **coordenadas do vetor** $\vec{v}$.

Representa-se por $\vec{v}(v_1, v_2)$ o vetor de cooredenadas (v_1, v_2).

Dado um ponto A, o vetor $\overrightarrow{OA}$ designa-se por **vetor de posição** do ponto A.

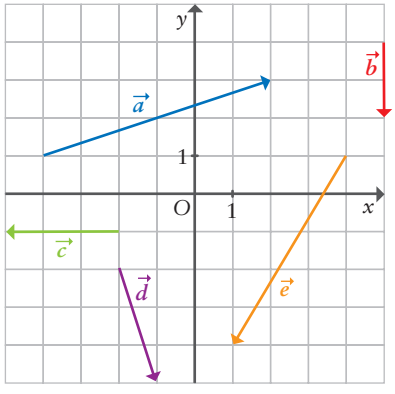
As coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ coincidem com as coordenadas do ponto A.



Dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ, tem-se:

- as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ são $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$;
- as coordenadas de $\vec{u} - \vec{v}$ são $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$;
- as coordenadas de $\lambda\vec{u}$ são $(\lambda u_1, \lambda u_2)$;
- a norma de $\vec{u}$ é $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$;
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $u_1 \times v_2 = u_2 \times v_1$ (ou seja, $u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1 = 0$).

43. Na figura seguinte estão representados cinco vetores em referencial o.n. xOy.
Indica as coordenadas de cada um deles.



44. Considera, num referencial o.n. xOy do plano, os vetores $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(7, 4)$ e $\vec{w}(4, -6)$.

a) Determina as coordenadas dos seguintes vetores.

a₁) $\vec{u} + \vec{v}$ **a₂)** $\vec{u} - \vec{v}$ **a₃)** $2\vec{v} - 3\vec{u}$ **a₄)** $3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

b) Determina a norma de $\vec{u}$ e a norma de $\vec{v}$.

c) Averigua se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

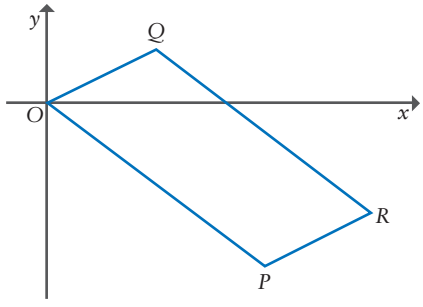
d) Averigua se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares.

e) Determina o número real k para o qual os vetores $\vec{t}(k, -12)$ e $\vec{v}$ são colineares.

f) Determina as coordenadas do vetor de norma 4 que tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}$.

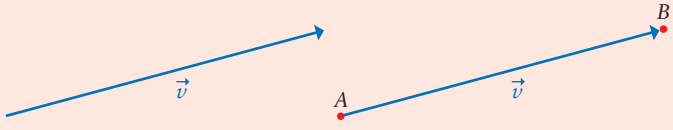
45. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. xOy, um paralelogramo de vértices O, $P(4, -3)$, $Q(2, 1)$ e R.

Determina as coordenadas do vértice R.



Soma de um ponto com um vetor

Dado um ponto A e um vetor $\vec{v}$, a soma de A com $\vec{v}$ é o ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.



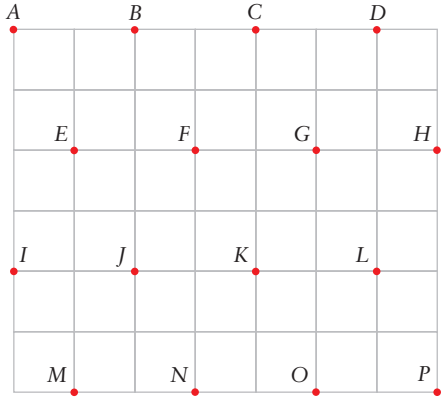
Desta definição resulta imediatamente que $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Dados, em referencial o.n. xOy, um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, tem-se que as coordenadas de $A + \vec{v}$ são $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.

46. Utilizando as letras da figura ao lado, indica o resultado de cada uma das seguintes operações.

a) $A + \overrightarrow{EG}$ **b)** $J + \overrightarrow{LO}$

c) $G + 2\overrightarrow{FK}$ **d)** $I + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{JM}$



47. Considera, num referencial o.n. xOy do plano, os vetores $\vec{u}(3, -2)$, $\vec{v}(-6, 7)$ e o ponto $P(-1, 5)$.

Determina as coordenadas dos seguintes pontos.

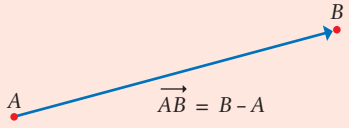
a) $P + \vec{u}$ **b)** $P + 2\vec{v} + \vec{u}$

48. Considera, num referencial o.n. xOy do plano, a circunferência de diâmetro $[AB]$ tal que o ponto A tem coordenadas $(-3, -4)$ e o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(4, 6)$.

Determina a equação reduzida da circunferência.

Diferença entre dois pontos

Define-se diferença entre os pontos B e A como sendo o vetor $\overrightarrow{AB}$ e escreve-se $\overrightarrow{AB} = B - A$.

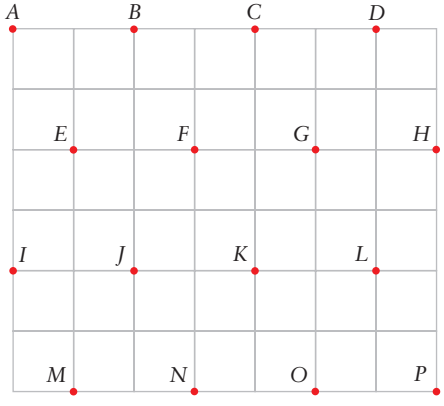


Desta definição resulta imediatamente que $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Dados um ponto $A(a_1, a_2)$ e um ponto $B(b_1, b_2)$, tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

49. Utilizando as letras da figura abaixo, indica o resultado de cada uma das seguintes operações.

a) $(B - A) + \overrightarrow{EG}$ **b)** $K + \frac{1}{3}(M - P)$ **c)** $I + 2(D - G) - \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$



50. Considera, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro $C(-2, 3)$ e que passa no ponto $A(4, 1)$.

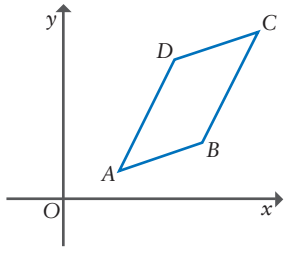
Seja B o ponto desta circunferência tal que $[AB]$ é um diâmetro.

Determina as coordenadas do ponto B .

51. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, um paralelogramo $[ABCD]$. Tem-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 1)$;
- o ponto B tem coordenadas $(5, 2)$;
- o ponto C tem coordenadas $(7, 6)$.

Determina as coordenadas do ponto D.



52. Considera, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[ABC]$ tal que o vértice A tem coordenadas $(6, -2)$, o ponto médio de $[AC]$ tem coordenadas $(8, 1)$ e o vetor $\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(10, -6)$. Determina as coordenadas do ponto médio de $[BC]$.

53. Considera, num referencial o.n. xOy, o trapézio $[ABCD]$, de bases $[AB]$ e $[CD]$, em que $A(-1, -2)$, $B(-2, 2)$, $C(k, 8)$ e $D(3, 0)$, com $k > 0$. Determina o valor de k.

Vetor diretor de uma reta. Relação com o declive da reta

Um vetor não nulo que tenha a direção de uma reta r designa-se por vetor diretor da reta r.

Imediatamente se reconhece que, sendo A e B dois pontos distintos de uma reta, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor dessa reta.

Dado um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, com $v_1 \neq 0$, e uma reta r de declive m, tem-se que $\vec{v}$ é vetor diretor da reta r se e só se $m = \frac{v_2}{v_1}$; em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r.

Daqui resulta que duas retas não verticais são paralelas se e só se têm o mesmo declive.

Qualquer vetor $\vec{v}(0, v_2)$, com $v_2 \neq 0$, tem a direção de uma reta vertical (ou seja, paralela ao eixo das ordenadas).

54. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta AB tal que $A(2, 3)$ e $B(0, 8)$.

a) Determina as coordenadas de um vetor diretor da reta.

b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, determina o declive da reta.

c) Escreve a equação reduzida da reta.

55. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r de equação $y = 5x - 3$.

a) Indica as coordenadas de um vetor diretor da reta.

b) Para um certo número real k, o vetor $\vec{v}(3, k)$ é um vetor diretor da reta. Qual é o valor de k?

56. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta que passa no ponto $A(-2, -4)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(5, 2)$.

Determina as coordenadas dos pontos de interseção desta reta com os eixos coordenados.

57. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r de equação $y = -2x + 5$. Seja s a reta que passa no ponto $A(-1, -7)$ e é paralela à reta r.

Determina a equação reduzida da reta s.

58. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta de equação $x = -1$.

Indica as coordenadas de um vetor de norma 4 que tenha a direção desta reta.

59. Num referencial o.n. xOy, indica as coordenadas de um vetor que tenha a direção da bissetriz dos quadrantes pares.

60. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r que passa no ponto $A(3, -1)$ e tem ordenada na origem igual a -7. Para um certo número real k, o vetor $\vec{v}(k-3, 8)$ é vetor diretor de uma reta s paralela à reta r.

a) Determina o valor de k.

b) Determina a equação reduzida da reta s, sabendo que ela interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 4.

61. Para cada par de retas r e s, definidas a seguir, verifica se são ou não paralelas.

a) $r: 3x + y = 9$ $\quad$ $s: y - 2x = 5$

b) $r: -8x + 2y = 24$ $\quad$ $s: y = 4x$

c) $r: x + 3y = 6$ $\quad$ $s: \frac{x}{3} = 2 - y$

d) $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $\quad$ $s: 2x + \frac{y}{5} - 1 = 0$

e) $r: y = 1$ $\quad$ $s: y = 2x$

f) $r: x = -2$ $\quad$ $s: y = 1 - x$

g) $r: x = 4$ $\quad$ $s: y = -3$

h) $r: x + 1 = 0$ $\quad$ $s: 6 = 4 - 5x$

i) $r: 5y - 3 = 12$ $\quad$ $s: -\frac{y}{2} + 1 = 0$

Equação vetorial de uma reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta

Seja $A(a_1, a_2)$ um ponto pertencente a uma reta r e $\vec{v}(v_1, v_2)$ um vetor diretor dessa reta.

Os pontos da reta r são todos os pontos da forma $A + \lambda\vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

A equação $P = A + \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$ designa-se por **equação vetorial da reta**.

Sendo $P(x, y)$, esta equação pode ser escrita na forma $(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2), \lambda \in \mathbb{R}$, a qual é equivalente a $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Este sistema designa-se por **sistema de equações paramétricas da reta** r.

62. Considera um referencial o.n. xOy instalado num plano.

Escreve uma equação vetorial e um sistema de equações paramétricas de cada uma das seguintes retas.

a) Reta que passa por $A(-1, 4)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(3, -2)$.

b) Reta que passa por $A(-1, 4)$ e por $B(3, 5)$.

c) Bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) Reta definida pela equação $y = -x + 1$.

e) Reta definida pela equação $y = 2$.

f) Reta definida pela equação $x = 0$.

63. Considera, num referencial o.n. xOy, os pontos $M(3, -1)$ e $N(-3, 5)$.

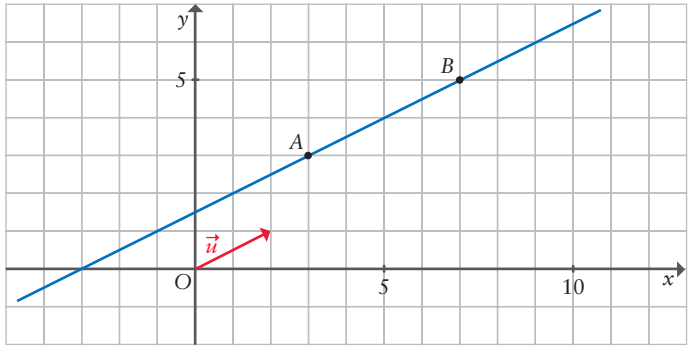
Escreve uma condição que defina a semirreta $\dot{M}N$.

64. Considera, num referencial o.n. xOy, o ponto $A(5, -2)$.

Seja B o simétrico de A em relação ao eixo Ox.

Escreve uma condição que defina o segmento de reta $[AB]$.

65. Na figura seguinte está representada, em referencial o.n. xOy, uma reta AB e um vetor $\vec{u}$, que tem a direção da reta AB.



a) Escreve uma equação vetorial da reta AB.

b) Escreve uma condição que defina:

b₁) o segmento de reta $[AB]$;

b₂) a semirreta $\dot{A}B$;

c) Indica o número real k tal que $A = B + k\vec{u}$.

66. Considera, num referencial o.n. xOy, a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$.

a) Mostra que o ponto $P(-1, 3)$ pertence à circunferência;

b) Seja r a reta que passa por P e pelo centro da circunferência. Define a reta r por meio de:

b₁) a sua equação reduzida;

b₂) uma equação vetorial;

b₃) um sistema de equações paramétricas.

3. Geometria analítica no espaço

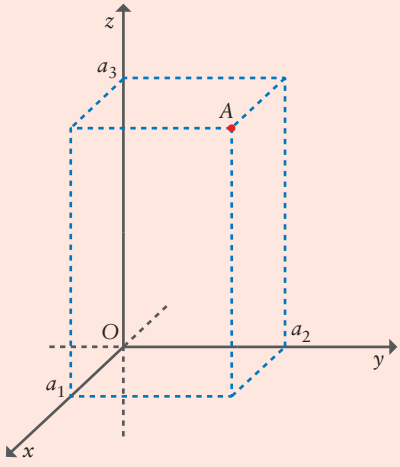
Referencial ortonormado no espaço

Um referencial ortonormado no espaço é um terno ordenado de retas numéricas que se intersetam nas respetivas origens, são perpendiculares duas a duas e têm unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada.

Dá-se o nome de **eixos coordenados** a essas três retas. A sua origem comum designa-se por **origem do referencial**, e representa-se usualmente por O.

Designa-se a primeira reta por **eixo das abcissas** (eixo Ox), a segunda por **eixo das ordenadas** (eixo Oy) e a terceira por **eixo das cotas** (eixo Oz).

Considerando no espaço um referencial o.n. $Oxyz$, e dados números reais a_1, a_2 e a_3, designa-se por $A(a_1, a_2\ a_3)$ o ponto de abcissa a_1, ordenada a_2 e cota a_3.



Ao terno ordenado (a_1, a_2, a_3) dá-se o nome de **coordenadas** de A.

Designa-se por plano xOy o plano definido pelos eixos Ox e Oy.

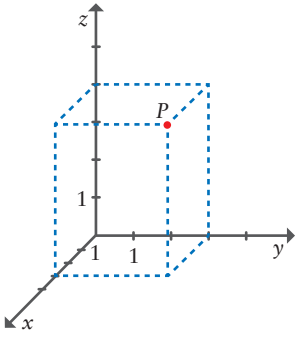
Designa-se por plano xOz o plano definido pelos eixos Ox e Oz.

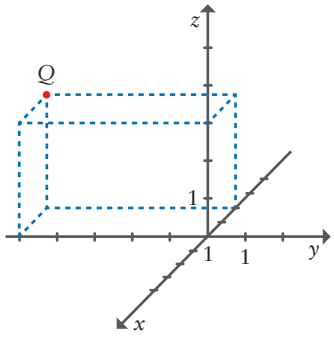
Designa-se por plano yOz o plano definido pelos eixos Oy e Oz.

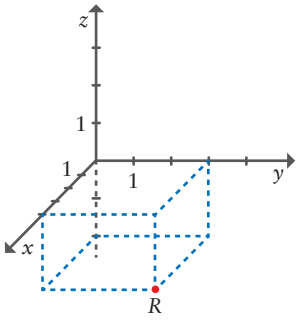
Estes três planos são designados por **planos coordenados**.

Os planos coordenados dividem o espaço em oito regiões, que se designam por **octantes**.

67. Em cada uma das figuras seguintes está representado um ponto em referencial o.n. $Oxyz$.



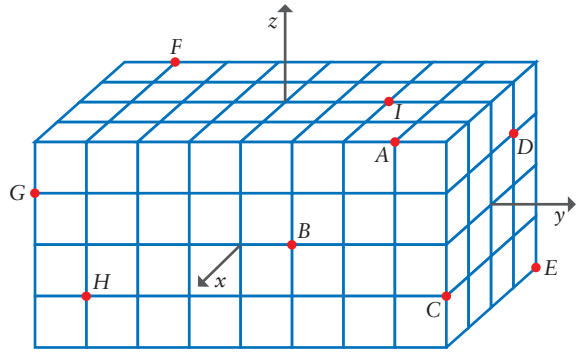




Indica as coordenadas do:

a) ponto P; **b)** ponto Q; **c)** ponto R.

68. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular decomposto em cubos de aresta 1.



a) Escreve as coordenadas de cada um dos pontos indicados na figura.

b) Escreve as coordenadas de cada um dos seguintes pontos.

b$_1$) Simétrico do ponto A relativamente ao plano xOy.

b$_2$) Simétrico do ponto B relativamente ao plano xOz.

b$_3$) Simétrico do ponto C relativamente ao plano yOz.

b$_4$) Simétrico do ponto H relativamente ao eixo Ox.

b$_5$) Simétrico do ponto D relativamente ao eixo Oy.

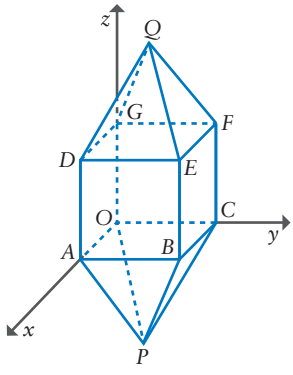
b$_6$) Simétrico do ponto F relativamente ao eixo Oz.

b$_7$) Simétrico do ponto C relativamente à origem.

69. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares. Sabe-se que:

- o vértice O do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice E do poliedro tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.

Indica as coordenadas de cada um dos vértices do poliedro.



70. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

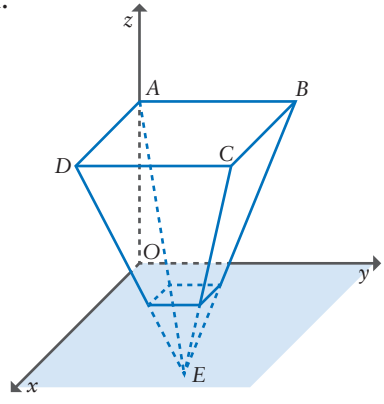
- a base da pirâmide é paralela ao plano xOy;
- o vértice A pertence ao eixo Oz;
- o vértice B pertence ao plano yOz;
- o vértice D pertence ao plano xOz;
- o vértice C tem coordenadas $(4, 4, 4)$;
- a altura da pirâmide é 6.

Determina:

a) as coordenadas dos vértices da pirâmide;

b) o volume da pirâmide;

c) a área de uma face lateral da pirâmide.

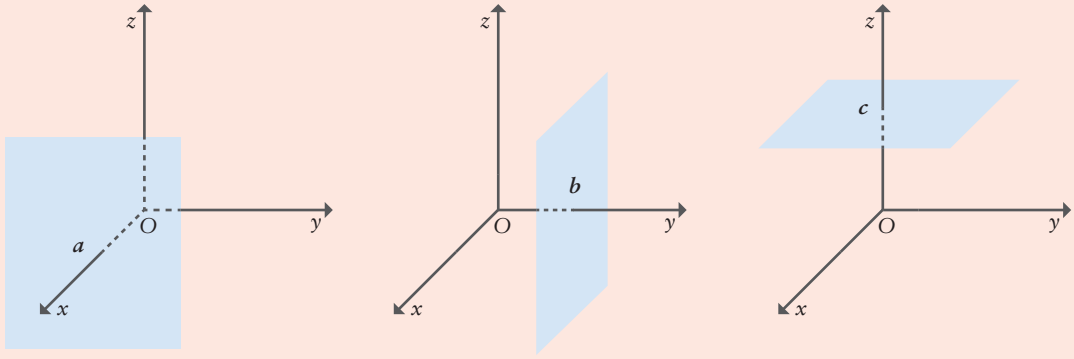


Planos paralelos aos planos coordenados

A equação $x = a$ define o plano paralelo ao plano yOz e que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa a.

A equação $y = b$ define o plano paralelo ao plano xOz e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada b.

A equação $z = c$ define o plano paralelo ao plano xOy e que interseta o eixo Oz no ponto de cota c.



71. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α, de equação $x = 5$;
- o plano β, de equação $y = -1$;
- o plano γ, de equação $z = -6$.

Indica qual dos planos coordenados (xOy ou xOz ou yOz) é paralelo ao:

a) plano α; **b)** plano β; **c)** plano γ.

72. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(-3, 4, 2)$.

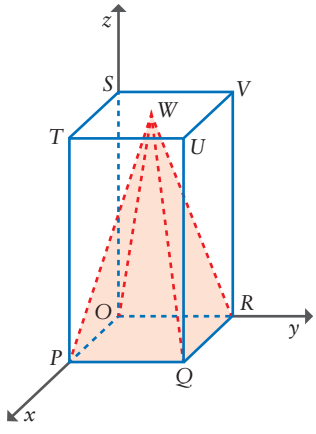
Escreve uma equação do plano que passa pelo ponto P e que é paralelo ao:

a) plano xOz; **b)** plano xOy; **c)** plano yOz.

73. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.

A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano xOy.

O vértice P pertence ao eixo Ox. O vértice R pertence ao eixo Oy. O vértice S pertence ao eixo Oz. O vértice U tem coordenadas $(2, 2, 4)$.



a) Indica as coordenadas dos vértices da pirâmide.

b) Escreve uma equação do plano PQU.

c) Escreve uma equação do plano TUV.

d) Determina o volume da pirâmide.

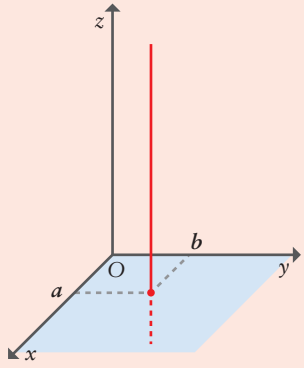
e) Determina a área da região compreendida entre as secções produzidas, pelo plano PTV, no prisma e na pirâmide.

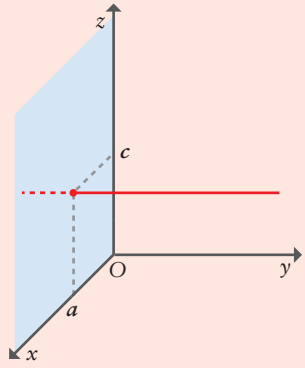
Retas paralelas aos eixos coordenados

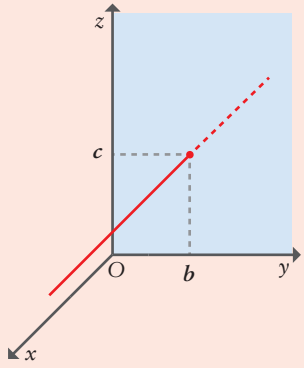
A condição $x = a \wedge y = b$ define a reta paralela ao eixo Oz e que interseta o plano xOy no ponto de abcissa a e ordenada b.

A condição $x = a \wedge z = c$ define a reta paralela ao eixo Oy e que interseta o plano xOz no ponto de abcissa a e cota c.

A condição $y = b \wedge z = c$ define a reta paralela ao eixo Ox e que interseta o plano yOz no ponto de ordenada b e cota c.







74. **a)** Em cada uma das alíneas seguintes é apresentada uma condição que define, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta paralela a um dos eixos coordenados (Ox ou Oy ou Oz). Indica qual é esse eixo.

a₁) $x = 0 \wedge y = 2$ **a₂)** $x = 1 \wedge z = 4$ **a₃)** $2y - 1 = 7 \wedge \frac{z}{6} + 2 = \frac{1}{3}$

b) Indica as coordenadas de um ponto que pertença à reta considerada em a_3).

75. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $P(2, 4, 6)$, $Q(2, 4, 0)$, $R(-1, 4, 6)$ e $S(2, 8, 6)$.

a) Indica qual dos eixos coordenados (Ox ou Oy ou Oz) é paralelo à:

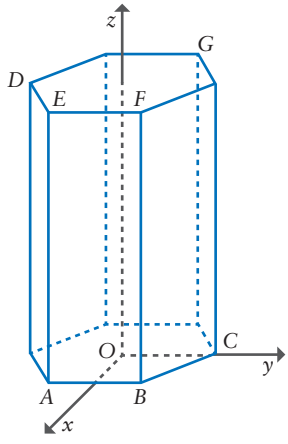
a₁) reta PQ; **a₂)** reta PR; **a₃)** reta PS.

b) Escreve uma condição que defina a:

b₁) reta PQ; **b₂)** reta PR; **b₃)** reta PS.

76. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular. Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à base inferior do prisma, a qual está contida no plano xOy e tem por centro a origem do referencial;
- os pontos D, E, F e G pertencem à base superior do prisma, a qual está contida no plano de equação $z = 12$;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 4, 0)$.



a) Determina as coordenadas do ponto G.

b) Escreve uma condição que defina a reta BF.

c) Escreve uma condição que defina a reta AB.

d) Determina o volume do prisma.

Distância entre dois pontos

Dado um referencial ortonormado no espaço e dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, designa-se por $d(A, B)$ a medida da distância entre os pontos A e B.

Tem-se $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Exemplo:

A distância entre $A(2, -1, 3)$ e $B(5, 1, -3)$ é

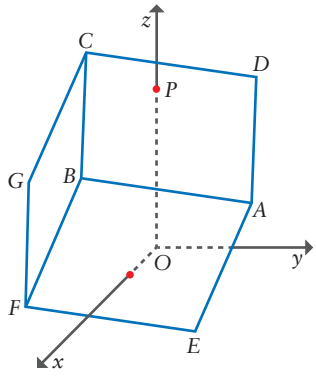
$$\sqrt{(5-2)^2 + [1-(-1)]^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$$

77. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(3, 4, 5)$, $B(-1, 8, -2)$, $C(3, -4, 4)$, $D(-1, 4, 2)$, $E(1, 6, -7)$ e $F(2, 6, -1)$.

Determina:

a) $d(A, B)$ **b)** $d(B, C)$ **c)** $d(A, D)$ **d)** $d(C, E)$ **e)** $d(B, F)$

78. A figura ao lado representa um cubo, num referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

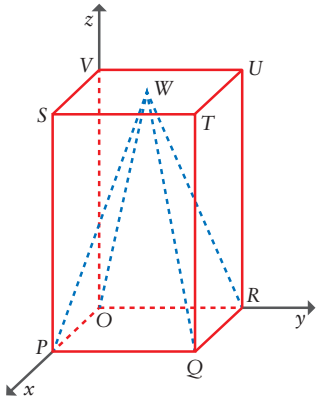
- $[ABC]$ é uma face do cubo;
- o ponto A tem coordenadas $(3, 5, 3)$;
- o ponto D tem coordenadas $(-3, 3, 6)$.

a) Determina o volume do cubo.

b) Escreve uma equação do plano que passa por A e é paralelo ao plano xOz.

c) Escreve uma condição que defina a reta que passa por D e é perpendicular ao plano yOz.

79. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.



A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W, vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(5, 0, 0)$.

a) Escreve uma equação do plano PQT.

b) Define, por uma condição, a reta RU.

c) Sabe-se que o volume da pirâmide é igual a 75.

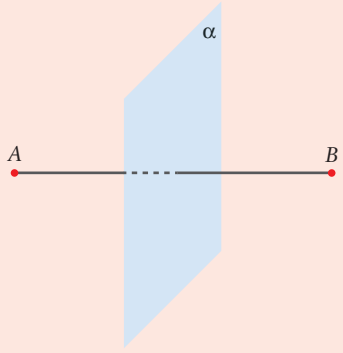
c₁) Determina as coordenadas do ponto W.

c₂) Determina $\overline{PW}$.

Plano mediador de um segmento de reta

Dado um referencial ortonormado no espaço e dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, seja α o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ (plano perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio).

O plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(A, P) = d(B, P)$.



Exemplos:

- Seja O a origem do referencial e $A(0, 0, 6)$.

  O segmento de reta $[OA]$ está contido no eixo Oz, pelo que o plano mediador deste segmento é paralelo ao plano xOy. Como o ponto médio do segmento de reta $[OA]$ é $M(0, 0, 3)$, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[OA]$ é $z = 3$.

- Sejam $A(3, 1, 4)$ e $B(3, -1, 4)$.

  O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy, pelo que o plano mediador deste segmento é paralelo ao plano xOz. Como o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é $M(3, 0, 4)$, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é $y = 0$ (plano xOz).

- Sejam $A(-2, 1, 4)$ e $B(6, 1, 4)$.

  O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox, pelo que o plano mediador deste segmento é paralelo ao plano yOz. Como o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é $M(2, 1, 4)$, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é $x = 2$.

- Sejam $A(-2, 1, 3)$ e $B(3, -1, 4)$.

  O plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ tais que $d(A, P) = d(B, P)$.

  Tem-se:

  $$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2} \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 1 - 6z + 9 = -6x + 9 + 2y + 1 - 8z + 16 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow 10x - 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + z - 6 = 0$$

80. Determina uma equação do plano mediador de cada um dos seguintes segmentos de reta.

a) $[AB]$, em que $A(2, 0, 0)$ e $B(-2, 0, 0)$.

b) $[CD]$, em que $C(3, 0, 0)$ e $D(0, 3, 0)$.

c) $[EF]$, em que $E(-3, 1, 4)$ e $F(2, 0, 6)$.

d) $[GH]$, em que $G(-6, -2, 4)$ e $H(-3, 1, 2)$.

81. Seja α o plano mediador de um segmento de reta $[PQ]$.

Uma equação do plano α é $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

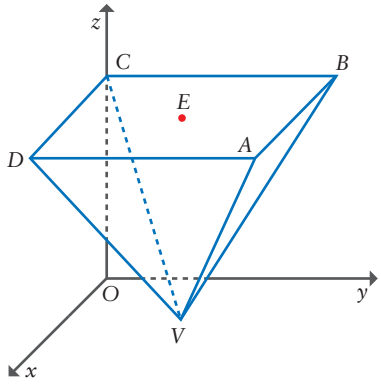
a) Verifica que o ponto $R(3, 3, -1)$ pertence ao plano α .

b) Sabendo que o ponto P tem coordenadas $(5, 9, 2)$, determina a distância entre os pontos R e Q .

82. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide é paralela ao plano xOy ;
- o ponto A tem coordenadas $(8, 8, 7)$;
- o ponto B pertence ao plano yOz ;
- o ponto C pertence ao eixo Oz ;
- o ponto D pertence ao plano xOz ;
- o ponto E é o centro da base da pirâmide ;
- o vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy .



a) Determina o volume da pirâmide.

b) Determina uma equação do plano VDB . Sugestão: encontra um segmento de reta em relação ao qual o plano VDB seja plano mediador.

c) Escreve uma equação do plano ABD .

d) Escreve uma condição que defina a reta AB .

e) Escreve uma condição que defina a reta VE .

f) Indica as coordenadas do simétrico do ponto A relativamente ao plano yOz .

Superfície esférica

Dados um referencial o.n. $Oxyz$, um ponto $C(c_1, c_2, c_3)$ e um número real positivo r , a equação

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$$

é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro no ponto C e raio r .

Designa-se esta equação por equação reduzida da superfície esférica.

continua ▶

continuação

Exemplos:

- $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=25$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro em $C(2,-3,0)$ e raio 5.
- $x^2+y^2+z^2=9$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro na origem do referencial e raio 3.
- Tem-se:

  $x^2+y^2+z^2-6x+8y+4z=11 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+8y+z^2+4z=11 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+8y+16+z^2+4z+4=11+9+16+4 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=40$

  pelo que $x^2+y^2+z^2-6x+8y+4z=11$ é uma equação da superfície esférica de centro em $C(3,-4,-2)$ e raio $\sqrt{40}$.

Esfera

A inequação $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2 \leqslant r^2$ define a esfera de centro C e raio r.

Exemplos:

- $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2 \leqslant 16$ define a esfera de centro em $C(0,-3,1)$ e raio 4.
- $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2 < 16$ define o interior da esfera de centro em $C(0,-3,1)$ e raio 4.
- $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2 > 16$ define o exterior da esfera de centro em $C(0,-3,1)$ e raio 4.

83. Escreve uma equação para cada uma das seguintes superfícies esféricas.

a) Centro no ponto $C(1,-2,-1)$ e raio 3.

b) Centro no ponto $C(2,0,-1)$ e raio 4.

c) Centro no ponto $C(3,0,0)$ e raio 2.

d) Centro na origem e raio 1.

e) Centro no ponto $C\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{3}{5}\right)$ e raio $\sqrt{2}$.

84. Indica as coordenadas do centro e o raio de cada uma das superfícies esféricas definidas pelas equações seguintes.

a) $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=36$

b) $(x+1)^2+(y-7)^2+(z+3)^2=12$

c) $x^2+(y+3)^2+z^2=1$

d) $x^2+y^2+z^2=5$

e) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=22$

f) $x^2+y^2+z^2+10y-8z=40$

85. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de centro em $A(3,4,1)$ e que passa no ponto $B(9,-2,-1)$.

Escreve a equação reduzida desta superfície esférica.

86. Num referencial o.n. $Oxyz$, considera:

- a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$;
- o plano de equação $z = 4$.

Qual é a área do círculo que é a interseção da esfera com o plano?

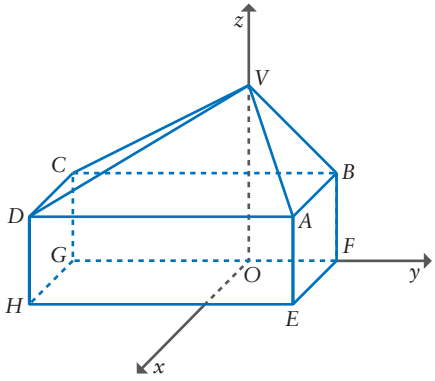
87. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide $[ABCDV]$.

A base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a base da pirâmide coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta $[GF]$ está contida no eixo Oy.

Uma equação da superfície esférica com centro $A(1, 1, 1)$ e que contém G é

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11$$



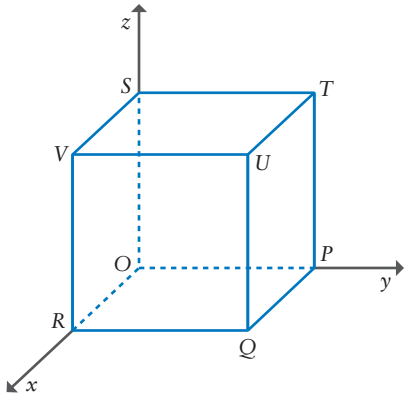
a) Determina as coordenadas do ponto H.

b) Designando por c a cota do ponto V, mostra que o volume do sólido é $2 + c$.

88. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice R pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice S pertence ao semieixo positivo Oz;
- a abcissa de R é 2.



a) Escreve uma condição que defina a reta UQ.

b) Determina uma equação da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo.

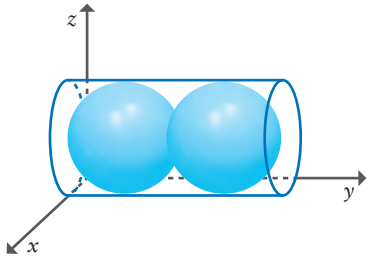
c) Calcula a área da região do plano PUV compreendida entre a secção determinada por esse plano no cubo e a secção determinada pelo mesmo plano na superfície esférica referida na alínea anterior.

89. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.

A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

Sabe-se que:

- o cilindro tem uma das bases no plano xOz;
- o centro dessa base é o ponto de coordenadas $(3, 0, 3)$;



- a outra base está contida no plano de equação $y = 12$;
- as bolas são esferas de raio igual a 3;
- os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais.

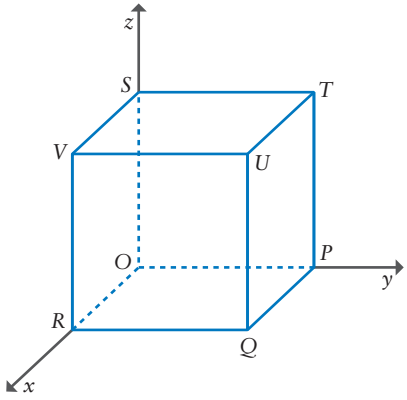
a) Escreve uma condição que defina a reta que passa pelos centros das esferas.

b) Escreve uma condição que defina a esfera correspondente à bola mais afastada do plano xOz .

c) Determina o volume da caixa cilíndrica.

d) Considera agora a caixa vazia. Seccionou-se a caixa pelo plano de equação $z = 4$. Supondo que a unidade do referencial é o centímetro, determina o perímetro da secção obtida.

90. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice R pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o vértice S pertence ao semieixo positivo Oz ;
- a abcissa de R é 2.

a) Determina uma equação do plano RVT . Sugestão: encontra um segmento de reta em relação ao qual o plano RVT seja plano mediador.

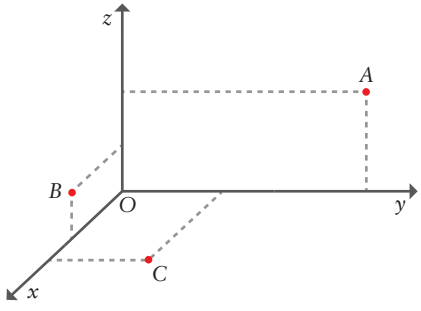
b) Averigua se o ponto $A(-3, 4, 7)$ pertence ao plano RVT .

c) Escreve uma condição que defina a reta PQ .

d) Escreve uma condição que defina a esfera tangente a todas as faces do cubo.

e) Escreve uma condição que defina a região do espaço interior ao cubo e exterior à esfera considerada na alínea anterior.

91. Na figura ao lado estão representados três pontos, em referencial o.n. $Oxyz$:



- o ponto A , que tem coordenadas $(0, 5, 2)$;
- o ponto B , que tem coordenadas $(3, 0, 1)$;
- o ponto C , que tem coordenadas $(4, 2, 0)$.

a) Determina uma equação do plano mediador do segmento $[AB]$.

b) Verifica se o ponto C pertence ao plano mediador do segmento $[AB]$.

c) Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , determina a sua área.

d) Considera a superfície esférica de centro em A , cuja interseção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determina uma equação dessa superfície esférica.

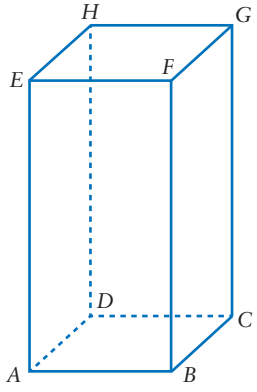
4. Cálculo vetorial no espaço

Vetores do espaço

Estendem-se naturalmente ao espaço os conceitos de **vetor**, de **vetor nulo**, de **direção**, **sentido** e **norma de um vetor**, de **vetores colineares** e de **vetores simétricos**.

Também de forma natural, estendem-se ao espaço as operações de adição e subtração de vetores, de produto de um número real por um vetor, de soma de um ponto com um vetor e de diferença entre dois pontos, bem como as respetivas propriedades.

92. Na figura ao lado está representado um prisma quadrangular regular.



a) Utilizando as letras da figura, indica:

a₁) dois vetores iguais;

a₂) dois vetores simétricos;

a₃) dois vetores não colineares com a mesma norma;

a₄) dois vetores não colineares com normas diferentes.

b) Utilizando as letras da figura, indica o resultado de cada uma das seguintes operações.

b₁) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$

b₂) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

b₃) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CG}$

b₄) $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DB}$

b₅) $C + \overrightarrow{CD}$

b₆) $B + \overrightarrow{CH}$

b₇) $H + \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DA}\right)$

b₈) $E - F$

b₉) $D + (F - H)$

b₁₀) $B + 2\overrightarrow{AD} + (E - G)$

Coordenadas de um vetor

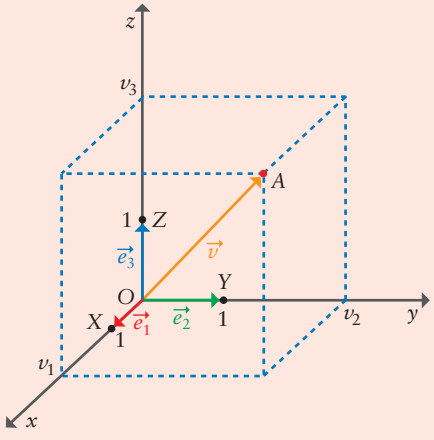
Sejam, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$ e $Z(0, 0, 1)$ e os vetores $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ tais que $\vec{e_1} = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e_3} = \overrightarrow{OZ}$.

Dado um qualquer vetor $\vec{v}$, existe um e um só terno ordenado de números reais (v_1, v_2, v_3) tal que $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$. Diz-se que (v_1, v_2, v_3) são as **coordenadas do vetor** $\vec{v}$.

Representa-se por $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ o vetor de coordenadas (v_1, v_2, v_3).

Dado um ponto A, o vetor $\overrightarrow{OA}$ designa-se por **vetor de posição** do ponto A.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ coincidem com as coordenadas do ponto A.



continua

continuação

Dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um número real λ, tem-se:

- **as coordenadas do vetor $\vec{u}+\vec{v}$ são $(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$;**
- **as coordenadas do vetor $\vec{u}-\vec{v}$ são $(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3)$;**
- **as coordenadas do vetor $\lambda\vec{u}$ são $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$;**
- **a norma do vetor $\vec{u}$ é $\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.**

Recordemos que o vetor nulo é colinear com qualquer vetor e que, dado um vetor $\vec{u}$ não nulo, um vetor $\vec{v}$ é colinear com $\vec{u}$ se e só se existe um número real λ tal que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Tem-se também que $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ são colineares se e só se $u_1 \times v_2 = u_2 \times v_1 \wedge u_2 \times v_3 = u_3 \times v_2 \wedge u_1 \times v_3 = u_3 \times v_1$.

93. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$:

- o ponto $P(6, -7, 10)$;
- os vetores $\vec{u}\,(2, 1, -2)$ e $\vec{v}\,(-6, -3, 6)$.

a) Determina as coordenadas dos seguintes vetores.

a₁) $-\vec{u}$ **a₂)** $\overrightarrow{OP}+\vec{u}$ **a₃)** $\vec{u}-\vec{v}$ **a₄)** $3\vec{u}+2\vec{v}$ **a₅)** $\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP}-\vec{u}\right)$

b) Determina a equação reduzida da superfíce esférica de centro em P e raio igual a $\|\vec{u}\|$.

c) Justifica que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

94. Verifica, em cada uma das alíneas seguintes, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

a) $\vec{u}(-2, 3, -4)$ e $\vec{v}(8, -12, 16)$

b) $\vec{u}(8, -6, 4)$ e $\vec{v}(4, -3, -1)$

c) $\vec{u}(-5, 5, -5)$ e $\vec{v}(-3, 3, -3)$

d) $\vec{u}(6, -1, -2)$ e $\vec{v}(3, -2, -1)$

e) $\vec{u}(2, 0, -2)$ e $\vec{v}(4, -4, 0)$

f) $\vec{u}(0, 4, 10)$ e $\vec{v}(0, -2, -5)$

g) $\vec{u}(1, 0, 0)$ e $\vec{v}(0, 1, 0)$

h) $\vec{u}(0, 0, 5)$ e $\vec{v}(0, 0, -1)$

95. Determina as coordenadas do vetor $\vec{v}$ de norma 21 e que tem a mesma direção, mas sentido contrário, do vetor $\vec{u}(2, -6, 3)$.

Soma de um ponto com um vetor

Dados, em referencial o.n. $Oxyz$, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, tem-se que as coordenadas do ponto $A+\vec{v}$ são $(a_1+v_1, a_2+v_2, a_3+v_3)$.

96. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(-3, 1, 6)$ e $B(7, -4, 9)$ e o vetor $\vec{u}(6, 2, 4)$.

Determina as coordenadas dos seguintes pontos:

a) $A+\vec{u}$ **b)** $B+3\vec{u}$ **c)** $A-\vec{u}$ (ou seja, $A+(-\vec{u})$) **d)** $B-\frac{1}{2}\vec{u}$

97. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $P(a, -7, 8)$ e $Q(-3, b, -2)$ e o vetor $\vec{u}(-5, 2, c-10)$ (a, b e c designam números reais). Sabe-se que $P + \vec{u} = Q$.

Calcula o valor de a, b e c.

98. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, um ponto C e um vetor não nulo $\vec{v}$.

Seja $P = C + \vec{v}$.

Justifica que o ponto P pertence à superfície esférica de centro em C e raio igual a $\|\vec{v}\|$.

99. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $C(-5, 4, 7)$.

O ponto C é o centro da base de um cone de revolução de volume 20π.

O ponto $A(-3, 3, 7)$ pertence à circunferência que limita a base do cone.

Seja V o vértice do cone. Sabe-se que o vetor $\overrightarrow{CV}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\vec{u}(1, 2, 2)$.

Determina as coordenadas do ponto V.

Diferença entre dois pontos e soma de um ponto com um vetor

Dados, em referencial o.n. $Oxyz$, dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ e um vetor $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, tem-se:

- **as coordenados do vetor $\overrightarrow{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$;**
- **identifica-se a diferença entre os pontos B e A com o vetor $\overrightarrow{AB}$ e escreve-se $\overrightarrow{AB} = B - A$;**
- **se $P = A + \vec{u}$, então $P(a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3)$.**

100. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(2, 1, 0)$, $B(5, -8, 3)$ e $C(7, -4, 9)$.

Determina as coordenadas dos seguintes vetores.

a) $B - A$ **b)** $A - C$ **c)** $C - B$ **d)** $\frac{2}{3}(A - B)$

101. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(-1, 3, -5)$ e $B(2, 4, -1)$.

Determina a distância de A a B:

a) utilizando a fórmula da distância entre dois pontos;

b) determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e depois a norma deste vetor.

102. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $P(3, 0, 2)$ e $Q(5, 4, 8)$.

Para um certo número real k, os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{u}(8k^3, -2, -3)$ são colineares.

Determina o valor de k.

103. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 14$.

a) Mostra que o ponto $A(4, 1, 3)$ pertence a esta superfície esférica.

b) Sabe-se que $[AB]$ é um diâmetro desta superfície esférica. Determina as coordenadas do ponto B.

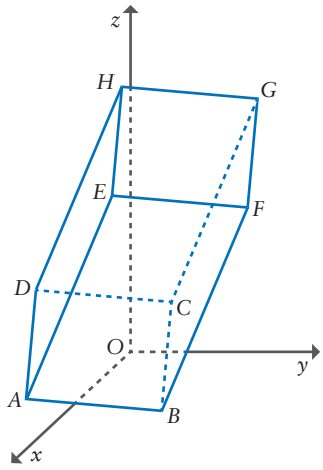
104. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

As coordenadas dos pontos A, B e G são $(11, -1, 2)$, $(8, 5, 0)$ e $(6, 9, 15)$, respetivamente.

a) Determina as coordenadas do ponto H.

b) Determina a equação reduzida da superfície esférica com centro no ponto A e que passa no ponto B.

c) Escreve uma condição que defina a reta que passa no ponto G e que é paralela ao eixo Oy.



Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Dados, em referencial o.n. $Oxyz$, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um ponto $B(b_1, b_2, b_3)$, seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Tem-se que as coordenadas do ponto M são $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$.

105. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(-5, 12, 7)$ e $B(1, -4, 9)$.

a) Determina as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

b) Considera o vetor $\vec{v}(1, 8, -5)$. Seja $C = A + \vec{v}$. Determina as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AM}$, em que M é o ponto médio do segmento de reta $[BC]$.

106. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(6, -2, 9)$ e $B(8, 8, -1)$.

O segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro de uma superfície esférica.

Determina a equação reduzida dessa superfície esférica.

Equação vetorial de uma reta. Sistema de equações paramétricas de uma reta

Seja $A(a_1, a_2, a_3)$ um ponto pertencente a uma reta r e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ um vetor diretor dessa reta. Os pontos da reta r são todos os pontos da forma $A + \lambda\vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

A equação $P = A + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ designa-se por equação vetorial da reta.

Sendo $P(x, y, z)$, esta equação pode ser escrita na forma $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, a qual é equivalente a $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Este sistema designa-se por sistema de equações paramétricas da reta r.

107. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $A(1, 4, 3)$, o ponto $B(-1, 2, 5)$ e o vetor $\vec{u}(2, -3, 4)$.

Para cada uma das retas a seguir indicadas, escreve uma equação vetorial e um sistema de equações paramétricas.

a) Reta que passa por A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

b) Reta que passa por A e por B.

c) Reta definida pela condição $x = 3 \wedge y = 2$.

d) Reta definida pela condição $x = 1 \wedge z = 4$.

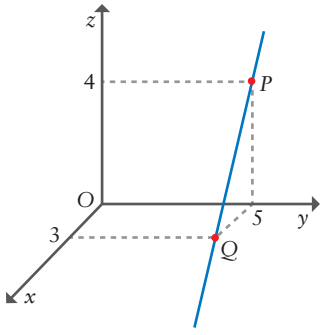
e) Reta definida pela condição $y = 5 \wedge z = -1$.

108. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta PQ.

Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao plano yOz;
- o ponto Q pertence ao plano xOy.

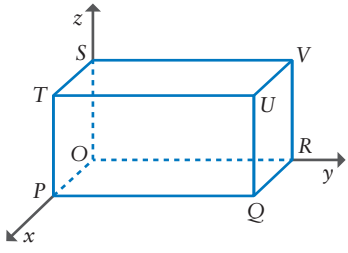
Escreve uma equação vetorial da reta PQ.



109. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo.

Sabe-se que:

- o vértice O é a origem do referencial;
- o vértice P pertence ao eixo Ox;
- o vértice R pertence ao eixo Oy;
- o vértice S pertence ao eixo Oz;
- o vértice U tem coordenadas $(2, 4, 2)$.



a) Escreve uma equação vetorial da reta QS.

b) Escreve um sistema de equações paramétricas da reta PR.

c) Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta RT com o plano de equação $x = 10$.

d) Seja r a reta de equação $(x, y, z) = (2, 0, 2) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$. Qual dos pontos representados na figura é o ponto de interseção da reta r com o plano OUV?

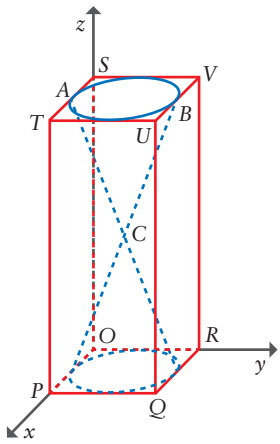
110. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a reta s de equação vetorial:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(-1, 3, 5), k \in \mathbb{R}$$

a) Mostra que a reta s passa no ponto de coordenadas $(-2, 7, 18)$.

b) Mostra que a reta s é paralela à reta AB, sendo $A(0, 2, 1)$ e $B(2, -4, -9)$.

111. A figura ao lado representa, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e dois cones de revolução iguais com o mesmo vértice e bases inscritas nas bases do prisma.



O prisma tem uma aresta contida no eixo Ox, uma aresta contida no eixo Oy e uma aresta contida no eixo Oz.

O diâmetro $[AB]$ da base de um dos cones é paralelo à aresta $[SV]$.

O ponto U tem coordenadas $(4, 4, 10)$.

Determina:

a) a área total do prisma;

b) um sistema de equações paramétricas da reta PB;

c) uma equação do plano PTU;

d) as coordenadas do simétrico de U em relação ao plano yOz;

e) as coordenadas do simétrico de C em relação ao eixo Ox;

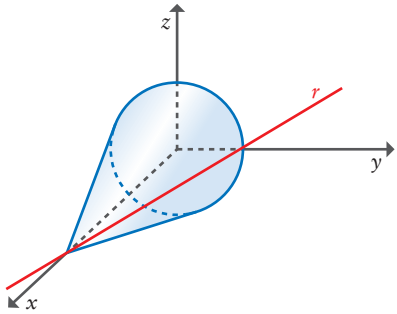
f) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AC]$;

g) uma equação do plano mediador do segmento de reta $[PU]$;

h) a equação reduzida da superfície esférica de centro em A e que passa por C;

i) o volume da região interior do prisma exterior aos cones.

112. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.



A base do cone tem centro na origem do referencial.

A reta r, de equação $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(3, -1, 0), k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.

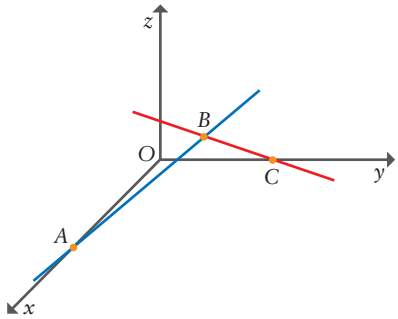
a) Determina o volume do cone.

b) Escreve uma equação do plano que passa no vértice do cone e é perpendicular ao eixo Ox.

c) Determina a área do polígono que resulta da interseção do cone com o plano de equação $z = 0$.

113. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$:

- os pontos $A(10, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(0, 5, 0)$;
- as retas AB e BC.



a) Escreve uma equação vetorial da reta AB.

b) Calcula o volume da pirâmide $[OBCA]$.

Agora já podes realizar...

5 + 5 | Teste 3

20 AULA DIGITAL ALUNO
www.mat10.te.pt

Tema 4

Funções Reais de Variável Real

1. Generalidades acerca de funções

Conceito de função

Sejam A e B dois conjuntos.

Função de A em B é uma correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B.

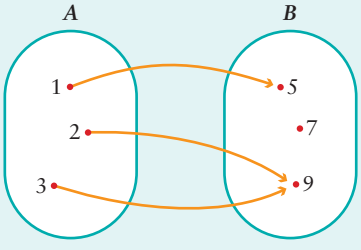
Numa função $f: A \to B$:

- A é o **domínio** (conjunto dos objetos);
- B é o **conjunto de chegada**;
- o conjunto das imagens é o **contradomínio**;
- o conjunto $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ é o **gráfico** da função; cada elemento do gráfico é um par ordenado da forma (objeto, imagem).

Para que uma função se considere definida é necessário conhecer:

- o domínio;
- o conjunto de chegada;
- uma regra segundo a qual seja possível saber, para cada objeto, qual é a sua imagem.

Exemplo:



Nesta função dizemos que:

- o objeto 1 tem imagem 5;
- os objetos 2 e 3 têm imagem 9;
- A é o domínio, B é o conjunto de chegada e $\{5, 9\}$ é o contradomínio;
- o gráfico desta função é o conjunto $\{(1, 5), (2, 9), (3, 9)\}$.

Esta função, que está definida por um diagrama de setas, também pode ser definida pela tabela:

x	1	2	3
$f(x)$	5	9	9

1. Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Seja $f : A \to B$ a função definida pela tabela:

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	5

a) Representa a função f por meio de um diagrama de setas.

b) Completa de modo a obteres proposições verdadeiras.

b_1) «A imagem de 3 é _____.»

b_2) «5 é a imagem de _____.»

b_3) «$f(1) =$ _____.»

b_4) «O contradomínio da função f é o conjunto _____.»

2. Considera os conjuntos $A = \{-5, 1, 7, 13\}$ e $B = \{-25, -13, -1, 11\}$.
Seja $f : A \to B$ a função definida por $f(x) = -2x + 1$.
Representa em extensão o gráfico da função f.

3. Seja h a função cujo gráfico é $\{(-2, 4), (-1, 2), (1, 2), (3, 1)\}$ e cujo conjunto de chegada é $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Representa a função h por meio de um diagrama de setas.

b) Indica o domínio e o contradomínio de h.

c) Indica o conjunto-solução da condição $h(x) < 3$.

4. Considera os conjuntos $A = \{1, 4, 9\}$ e $B = \{-12, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27\}$.
Cada uma das equações apresentadas a seguir define uma correspondência de A em B, que a cada $x \in A$ associa o(s) valor(es) $y \in B$ que satisfaz(em) a igualdade.
Para cada equação indica-se, entre parêntesis, o nome da correspondência a ela associada.

- $y(x - 7) = -24$ (correspondência f)
- $y^2 = x$ (correspondência g)
- $y = \sqrt{x^3}$ (correspondência h)
- $(y - x)(y + \sqrt{x}) = 0$ (correspondência i)

a) Define cada correspondência por meio de um diagrama de setas.

b) Indica quais das correspondências **não são** funções de A em B. Justifica a tua resposta.

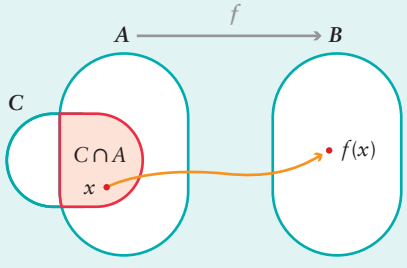
Restrição de uma função

Seja $f : A \to B$ uma função.

Seja C um conjunto.

A restrição de f a C representa-se por $f|_C$

Tem-se $f|_C : C \cap A \to B$ tal que $f|_C(x) = f(x)$.



5. Considera os conjuntos $G = \{-4, -1, 3, 5, 7, 9\}$ e $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Seja $f : G \to H$ a função definida pela seguinte tabela:

x	-4	-1	3	5	7	9
$f(x)$	3	1	4	6	8	2

Seja $A = \{-4, -2, 3, 6, 7\}$ e seja $B = \{x \in G : |f(x) - x| = 7\}$.

a) Representa a função $f|_A$ por meio de um diagrama de setas.

b) Representa a função $f|_B$ por meio de uma tabela.

c) Seja $C = \{x \in G : f|_C(x) = x + 1\}$. Representa o conjunto C em extensão.

6. Considera os conjuntos:

A = {Saramago, Cervantes, Galileu, Platão, Euclides, Eusébio, Maradona, Shakira, Madonna}

B = {Portugal, Espanha, França, Itália, Grécia, Argentina, Colômbia, Brasil, Estados Unidos}

Seja $f : A \to B$ a função que associa a cada personalidade o país onde nasceu.

a) Representa a função f por meio de um diagrama de setas.

b) Seja C o conjunto dos jogadores de futebol que participaram em campeonatos do mundo. Indica o domínio e o conjunto de chegada da função $f|_C$ e define-a por meio de uma tabela.

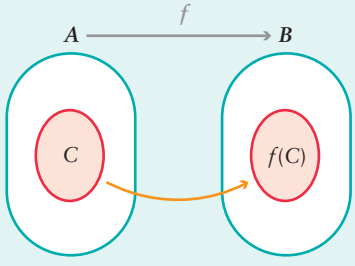
Imagem de um conjunto por uma função

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja C um conjunto contido em A.

A imagem do conjunto C por f representa-se por $f(C)$.

$f(C)$ é o contradomínio da restrição de f ao conjunto C.

Em particular, $f(A)$ é o contradomínio da função f.



7. Considera o conjunto $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
Sejam g e h as funções de domínio D e conjunto de chegada $\mathbb{N}$ tais que:

- $g(x) = x^2$
- $h(x)$ é igual ao produto dos divisores de x

a) Determina as soluções da condição $g(x) = h(x)$.

b) Considera o conjunto $E = \{2, 4, 10\}$. Indica em extensão o conjunto $h(E)$.

c) Seja $F = \{x \in D : h(x) = 2^{x-1}\}$. Indica em extensão o conjunto $g(F)$.

Função injetiva

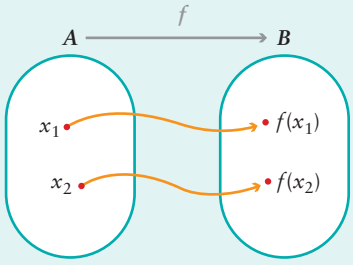
Uma função diz-se **injetiva** se objetos diferentes tiverem sempre imagens diferentes, isto é:

$f: A \to B$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Tendo em conta a lei da conversão, podemos dizer que:

$f: A \to B$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Uma função injetiva $f: A \to B$ diz-se injeção de A em B.



8. Seja $f: \{3, 7, 11, 15\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \dfrac{3x - 5}{4}$.

a) Define a função f por meio de uma tabela.

b) A função f é injetiva? Justifica a tua resposta.

9. Considera os conjuntos $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 25\}$ e $B = \{3, 5, 14, 20, 34\}$.

a) Constrói uma tabela que defina uma função $f: A \to B$ que verifique as seguintes condições:

- a imagem de um número par é múltiplo de 5;
- a imagem de um número primo é múltiplo de 7;
- a imagem de um quadrado perfeito é a sua raiz quadrada.

b) A função que definiste na alínea anterior é injetiva? Justifica a tua resposta.

c) Indica um conjunto C contido em A, com quatro elementos, tal que a função $f|_C$ seja injetiva.

10. Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função injetiva.

Sejam m e n números naturais diferentes tais que $f(m) \times f(n) = 4$.

Justifica que $f(m)$ é diferente de 2.

Função sobrejetiva

Uma função diz-se **sobrejetiva** se o contradomínio coincidir com o conjunto de chegada, isto é, $f: A \to B$ é sobrejetiva se $f(A) = B$.

Portanto, $f: A \to B$ é sobrejetiva se qualquer elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A.

Simbolicamente, tem-se: $\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$

Uma função sobrejetiva $f: A \to B$ diz-se sobrejeção de A em B.

11. Considera os conjuntos $A = \{\text{Ás, Rei, Dama, Valete}\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Sejam f e g as funções de A em B definidas pelas tabelas seguintes:

x	Ás	Rei	Dama	Valete
$f(x)$	1	4	2	2

x	Ás	Rei	Dama	Valete
$g(x)$	4	3	2	1

Indica qual destas funções não é sobrejetiva. Justifica a tua resposta.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{5x - 4}{3}$.

a) Determina o objeto cuja imagem é 7.

b) Mostra que, para cada número real y, existe um número real x tal que $f(x) = y$.
Sugestão: resolve, em ordem a x, a equação $\dfrac{5x - 4}{3} = y$.

c) Tendo em conta a alínea anterior, justifica que f é uma sobrejeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Função bijetiva

Uma função diz-se bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Uma função bijetiva $f : A \to B$ diz-se bijeção de A em B.

Tem-se, evidentemente, que f é uma bijeção de A em B se e só se para cada y pertencente a B existir um e um só x pertencente a A tal que $y = f(x)$.

13. Considera os conjuntos seguintes:
$A = \{\text{Torre, Bispo, Cavalo, Peão}\}$
$B = \{\text{Alekhine, Capablanca, Fischer, Kasparov}\}$

a) Seja $f : A \to B$ a função definida pela tabela seguinte:

x	Torre	Bispo	Cavalo	Peão
$f(x)$	Capablanca	Fischer	Kasparov	Capablanca

A função f é bijetiva? Justifica a tua resposta.

b) Seja $g : B \to A$ a função definida pelo seguinte gráfico:

{(Fischer, Peão), (Capablanca, Bispo), (Kasparov, Torre), (Alekhine, Cavalo)}

A função g é bijetiva? Justifica a tua resposta.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3x + 4$.
Mostra que a função f é bijetiva.

15. Seja A um conjunto com cinco elementos e seja B um conjunto com quatro elementos.
Justifica que não existe nenhuma função bijetiva de A em B, nem de B em A.

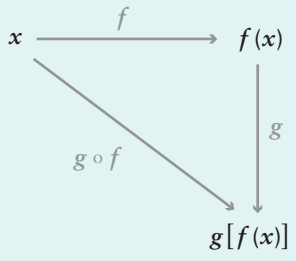
Composição de funções

Seja $f: D_f \to A$ e seja $g: D_g \to B$.

Função composta de g com f é a função $g \circ f: D_{g \circ f} \to B$ tal que:

- $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$
- $\forall x \in D_{g \circ f}, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

A função composta de g com f também pode ser designada por « g composta com f », « g após f » ou « f seguida de g ».



16. Considera os conjuntos seguintes:

C = {Funchal, Mindelo, Ponta Delgada}

I = {Ilha da Madeira, Ilha de São Miguel, Ilha de São Vicente}

A = {Arquipélago dos Açores, Arquipélago de Cabo Verde, Arquipélago da Madeira}

Seja $f: C \to I$ a função que associa a cada cidade do conjunto C a ilha a que pertence.

Seja $g: I \to A$ a função que associa a cada ilha do conjunto I o arquipélago a que pertence.

Constrói um diagrama de setas que defina a função $g \circ f$.

17. Considera os conjuntos seguintes:

$A = \{-2, -1, 2, 3\}$

$B = \{1, 4, 9, 16\}$

$C = \{2, 8, 18, 32\}$

Seja g a função de A em B que associa a cada elemento de A o seu quadrado.

Seja f a função de B em C que associa a cada elemento de B o seu dobro.

a) Define as funções g e f por meio de tabelas.

b) Define a função $f \circ g$ por meio de um diagrama de setas.

c) Define a função $f \circ g$ por meio de uma expressão analítica.

18. Considera os conjuntos seguintes:

$D = \{3, 5, 8, 13\}$

$E = \{-1, 1, 4, 9\}$

$F = \{4, 9, 16\}$

$G = \{2, 3, 4\}$

Seja $h: D \to E$ a função definida por $h(x) = x - 4$.

Seja $i: F \to G$ a função definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

a) Indica o domínio da função $i \circ h$.

b) Mostra que $\forall x \in D_{i \circ h}, (i \circ h)(x) = \sqrt{x - 4}$.

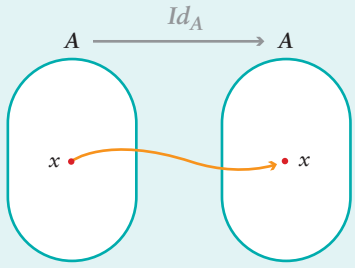
c) Determina o contradomínio da função $i \circ h$.

Função identidade

Dado um conjunto A, chama-se **função identidade** em A a função $Id_A : A \to A$ tal que $\forall x \in A, Id_A(x) = x$.

Portanto, tem-se:

- o conjunto de chegada coincide com o domínio;
- cada objeto é transformado no próprio objeto.



19. Seja $L = \{a, b, c, d\}$. Define, por meio de um diagrama de setas, a função Id_L.

20. Seja A um conjunto não vazio.
Seja $f : A \to A$ uma função injetiva.
Justifica que $f \circ f = f$ se e só se $f = Id_A$.

Função inversa de uma função bijetiva

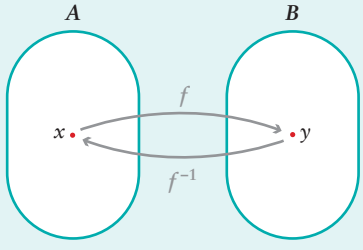
Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva.

Para cada $y \in B$, seja x_y o único elemento de A cuja imagem é y.

A função inversa de f é a função $f^{-1} : B \to A$ tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$.

Se $f : A \to B$ é uma função bijetiva, então a função $f^{-1} : B \to A$ é também bijetiva e tem-se $(f^{-1})^{-1} = f$.

Tem-se, também, $f^{-1} \circ f = Id_A$ e $f \circ f^{-1} = Id_B$.



21. Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 6, 25, 62\}$.
Seja $f : A \to B$ a função definida por $f(x) = x^3 - 2$.

a) Define as funções f e f^{-1} por meio de diagramas de setas.

b) Verifica que $f^{-1} \circ f = Id_A$ e $f \circ f^{-1} = Id_B$.

22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 6x + 5$.

a) Define f^{-1}.

b) Verifica que $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ e $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$.

23. Sejam a e b números reais. Sabe-se que: $a \neq -1$, $a \neq 0$ e $a \neq 1$.
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax + b$.
Justifica que existe um número real x_0 tal que $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

2. Generalidades acerca de funções reais de variável real

Função real de variável real

Chama-se **função real de variável real** uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.

Numa função real de variável real, quando o conjunto de chegada não é explicitamente referido, considera-se que é o conjunto $\mathbb{R}$.

Quando uma função real de variável real é definida por meio de uma expressão analítica, e nada é indicado em contrário, considera-se que o domínio é o conjunto de todos os valores reais que podemos atribuir à variável, de tal forma que a expressão obtida tenha significado.

24. Sejam f, g e h as seguintes funções:

$f : \{5, 6, 7, 8, 9\} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 3x - 4$

$g : \{1, 2, 3\} \to \{13, 17, 19\}$ a função definida pela tabela

x	1	2	3
$g(x)$	17	13	19

h : {Mercúrio, Vénus, Terra, Marte} $\to \mathbb{R}$ tal que $h(x)$ é a distância média de x ao Sol

Indica qual, ou quais, destas funções **não é** função real de variável real. Justifica a tua resposta.

25. Determina o domínio da função real de variável real f definida pela expressão:

a) $\dfrac{3x - 6}{2}$

b) $\dfrac{x}{x - 3}$

c) $\dfrac{x + 3}{x^2 + 16}$

d) $\dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

e) $\dfrac{2x + 5}{x^2 + 3x - 4}$

f) $\sqrt{x + 5}$

g) $\sqrt[3]{4 - 2x}$

h) $\dfrac{3 - \sqrt{x + 2}}{x}$

i) $\dfrac{\sqrt{8 - 3x}}{x - 2}$

j) $\dfrac{\sqrt{3 - x}}{x^2 - 2x}$

k) $\dfrac{1}{\sqrt{x - 6}}$

l) $\dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 1}}$

m) $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x} - 2}$

n) $\dfrac{x - 3}{2 - \sqrt{x}}$

o) $\dfrac{\sqrt{8 - x}}{\sqrt{2x - 1} - 3}$

p) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$

26. Considera, em referencial o.n. xOy, o triângulo T, de vértices $P(-3, 4)$, $Q(0, 2)$ e $R(3, 1)$.

Sejam A, B e C os seguintes conjuntos:

$A = \{-3, 0, 3\}$ (conjunto das abcissas dos vértices de T)

$B = \{1, 2, 4\}$ (conjunto das ordenadas dos vértices de T)

$C = \{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR}\}$

Sejam f, g e h as seguintes funções:

$f : A \to \mathbb{R}$ função que associa, a cada $x \in A$, o comprimento da circunferência de centro na origem do referencial e que passa pelo vértice de T cuja abcissa é x;

$g : B \to \mathbb{R}$ função que associa, a cada $y \in B$, a ordenada na origem da reta de declive 2 e que passa no vértice de T cuja ordenada é y;

$h : C \to \mathbb{R}$ função que associa, a cada elemento de C, a sua norma.

a) Define cada um destas funções por meio de uma tabela.

b) Indica qual, ou quais, destas funções **não é** função real de variável real. Justifica a tua resposta.

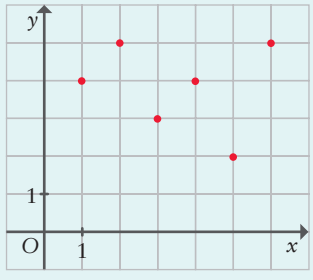
Gráfico cartesiano de uma função real de variável real

Como vimos, **gráfico de uma função** $f : A \to B$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, f(a))$, com a pertencente a A.

Se f for uma função real de variável real, os pares $(a, f(a))$ são pares ordenados de números reais, sendo, portanto, possível representá-los graficamente num referencial cartesiano xOy. A esta representação gráfica dá-se o nome de **gráfico cartesiano** da função f.

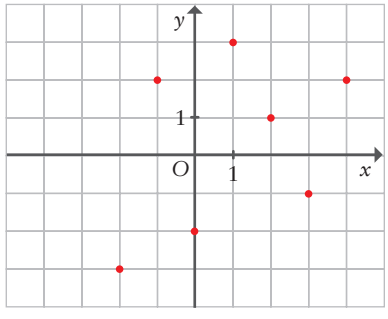
O gráfico cartesiano de uma função é quase sempre designado simplesmente por gráfico.

Exemplo:



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	5	3	4	2	5

27. Seja f a função cujo gráfico cartesiano, em referencial o.n. xOy, está representado ao lado.



a) Define a função f por meio de uma tabela.

b) Indica o domínio e o contradomínio da função f.

c) Indica o conjunto-solução da equação $f(x) = 2$.

d) Indica o conjunto-solução da inequação $f(x) < 0$.

28. Constrói o gráfico cartesiano da função $f : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.

29. Constrói o gráfico cartesiano de cada uma das seguintes funções.

a) $p(x) = 2x + 4$

b) $q(x) = -3x + 2$

c) $r(x) = \dfrac{x}{2} - 3$

d) $s(x) = \dfrac{3x - 5}{2}$

30. De uma certa função f, real de variável real, sabe-se que o seu gráfico cartesiano é uma reta r.

A reta r passa no ponto $P\left(1, \frac{15}{4}\right)$ e interseta o eixo das abcissas num ponto Q tal que $\overline{PQ} = \frac{25}{4}$.

a) Determina as coordenadas do ponto Q, sabendo que a sua abcissa é positiva.

b) Define a função f por meio de uma expressão analítica.

Teste da reta vertical

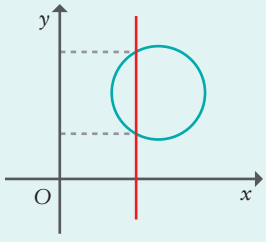
O gráfico de uma função real de variável real é muitas vezes uma linha. Contudo, nem todas as linhas podem ser gráficos de funções.

Como sabemos, numa função, cada objeto só pode ter uma imagem.

Portanto, se existir pelo menos uma reta vertical, ou seja, paralela ao eixo *Oy*, que intersete uma linha em mais do que um ponto, essa linha não pode ser gráfico de uma função.

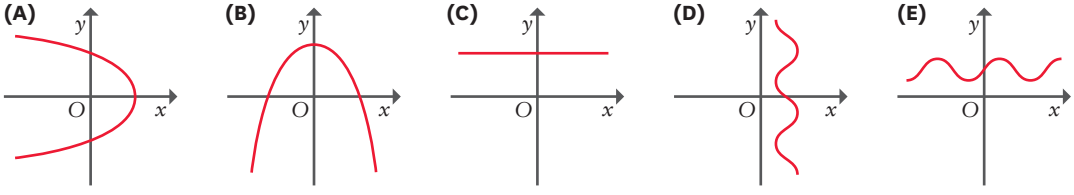
Exemplo:

Uma circunferência não pode ser gráfico de uma função.



31. Em cada uma das figuras seguintes está representada uma linha em referencial o.n. xOy.

Indica quais delas são gráficos de funções.



32. Considera, num referencial o.n. xOy, os pontos $P(2, 3)$ e $Q(2, -4)$.

Justifica que não existe nenhuma função cujo gráfico passe pelos pontos P e Q.

33. Sejam a e b números reais tais que $a \neq b$.

Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que:

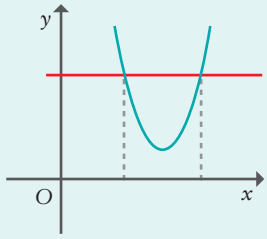
- a reta de equação $x = a$ interseta o gráfico da função g num ponto P de ordenada 7 e interseta o gráfico da função h num ponto Q de ordenada 5;
- os gráficos das funções g e h intersetam-se num ponto R de abcissa b.

a) Sabe-se que $g(a) - g(b) = h(b) - h(a)$. Determina a ordenada do ponto R.

b) Existirá alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja a união dos gráficos das funções g e h? Justifica a tua resposta.

Teste da reta horizontal

Se existir pelo menos uma reta horizontal, ou seja, paralela ao eixo Ox, que intersete o gráfico de uma função em mais do que um ponto, essa função não é injetiva, pois este facto evidencia que existem objetos diferentes com a mesma imagem.

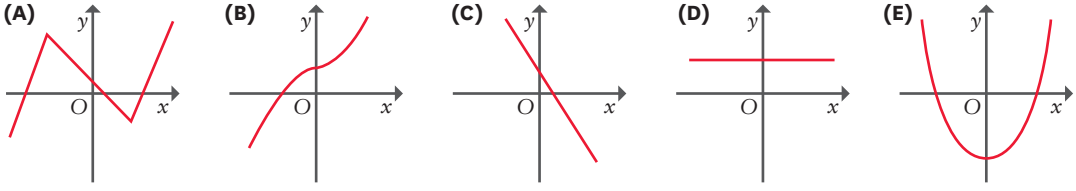


Exemplo:

A parábola ao lado representa o gráfico de uma função não injetiva.

34. Em cada uma das figuras seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função.

Indica em quais está o gráfico de uma função não injetiva.



35. Sejam a e b números reais tais que $a < 0 < b$.

Considera, num referencial o.n. xOy:

- o ponto A, de abcissa a, pertencente à bissetriz do 2.º quadrante;
- o ponto B, de abcissa b, pertencente à bissetriz do 1.º quadrante.

Admite que $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico passa pelos pontos A e B.

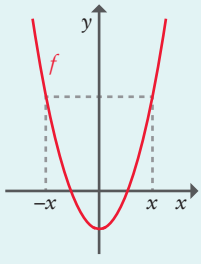
Justifica que a função f não é injetiva.

Funções pares

f é uma função par se, para todo o x pertencente a D_f, $-x$ também pertence a D_f e $f(-x) = f(x)$.

Assim, numa função par, objetos simétricos têm a mesma imagem.

Dado um plano munido de um referencial ortogonal, uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico.



36. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que f é par, que $f(-5) = 9$ e que $f(2) = 3$.

Indica, justificando, o valor de $f(-2) + f(5)$.

37. Averigua quais das seguintes funções, todas de domínio $\mathbb{R}$, são pares.

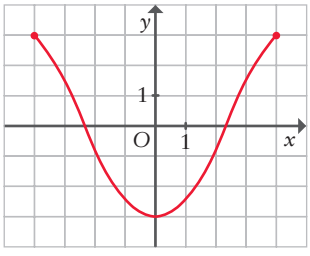
a) $f(x) = x^2 + 3|x|$ **b)** $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ **c)** $h(x) = (x-1)(x+1)$

38. Seja f a função, de domínio $[-5, 10]$, definida por $f(x) = x^2$.
A função f é par? Justifica a tua resposta.

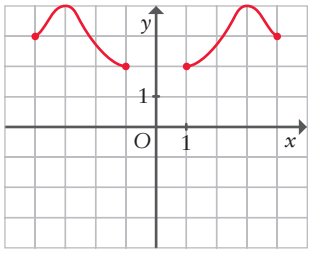
39. Seja n um número natural par e sejam a, b e c números reais diferentes de zero.
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + c$.
Averigua se f é uma função par.

40. Em cada uma das figuras seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função.
Indica em quais está o gráfico de uma função par.

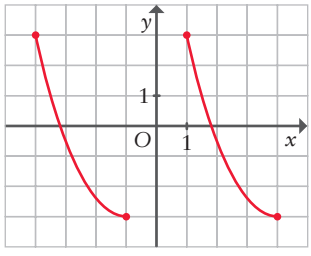
(A)



(B)



(C)



41. Considera, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- a função f é par;
- a reta de equação $y = 2$ interseta o gráfico da função f em exatamente dois pontos, A e B;
- o ponto A pertence ao 1.º quadrante;
- o triângulo $[OAB]$ tem área 12.

Quais são as soluções da equação $f(x) = 2$?

42. Sejam a e b números reais positivos com $a < b$.
Sejam A e B os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares de abcissas a e b, respetivamente.
Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par.
Admite que os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g.
Mostra que, no gráfico da função g, existem dois pontos, C e D, tais que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é $b^2 - a^2$.

43. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par.
Seja r a reta de equação $y = x + 2$.
Admite que o gráfico de f e a reta r se intersetam em exatamente dois pontos, A e B.
Justifica que as abcissas dos pontos A e B não são números simétricos.

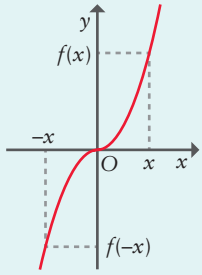
Funções ímpares

f é uma **função ímpar** se, para todo o x pertencente a D_f, $-x$ também pertence a D_f e $f(-x) = -f(x)$.

Assim, numa função ímpar, objetos simétricos têm imagens simétricas.

Dado um plano munido de um referencial ortogonal, uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico for simétrico em relação à origem do referencial.

Se uma função f é ímpar e se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.



44. Seja f uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que f é ímpar, que $f(-2) = 6$ e que $f(5) = -3$.
Indica, justificando, o valor de $f(2) + f(-5)$.

45. Seja f uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $f(0) + f(1) = 1 + f(-1)$.
Indica, justificando, o valor de $f(1)$.

46. Considera o conjunto $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Sejam f e g funções de domínio B tais que:

$$f(0) = 1\ ,\ f(1) = g(1) = -2 \text{ e } f(2) = g(2) = 3$$

Sabe-se que f é uma função par e que g é uma função ímpar.
Indica o contradomínio da função f e o contradomínio da função g.

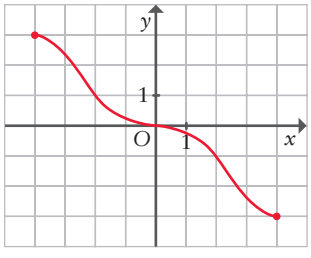
47. Averigua quais das seguintes funções reais de variável real são pares, quais são ímpares e quais não são pares nem ímpares.

a) $f(x) = 3x^2 - 5$ **b)** $g(x) = 2x^3 + 5$ **c)** $h(x) = x^2 - 2x$

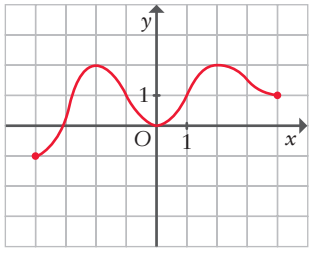
d) $i(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ **e)** $j(x) = x^2\sqrt[3]{x}$ **f)** $k(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

48. Em cada uma das figuras seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função.
Indica em quais está o gráfico de uma função ímpar.

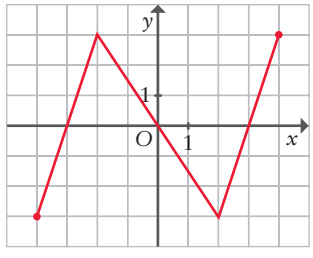
(A)



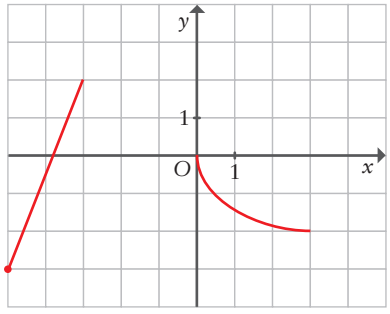
(B)



(C)



49. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função ímpar de domínio $[-5, 5]$. Completa o gráfico.



50. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar.

Sabe-se que os pontos $P(5, -2)$ e $Q(-4, 3)$ são pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

Completa as frases seguintes, de forma a obteres proposições verdadeiras.

a) «O ponto $A(-5, 2)$ pertence ao gráfico da função _____.»

b) «O ponto $B(-5, -2)$ pertence ao gráfico da função _____.»

c) «O ponto $C(4, -3)$ pertence ao gráfico da função _____.»

d) «O ponto $D(4, 3)$ pertence ao gráfico da função _____.»

51. Seja n um número natural. Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^{2n+1} + bx^{2n-1} + c$.

Mostra que f é uma função ímpar se e só se $c = 0$.

52. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

Relativamente a cada uma que consideres falsa, apresenta um contraexemplo.

Relativamente a cada uma que consideres verdadeira, explica porquê.

a) «Todas as funções injetivas são ímpares.»

b) «Todas as funções ímpares são injetivas.»

c) «O gráfico de qualquer função ímpar de domínio $\mathbb{R}$ interseta a bissetriz dos quadrantes pares.»

d) «Qualquer função de domínio $\mathbb{R}$ não pode ser simultaneamente par e ímpar.»

53. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par.

Mostra que $g \circ f$ é uma função par.

54. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Seja k um número real positivo.

Sejam A e B os pontos pertencentes do gráfico da função f que têm abcissas, respetivamente, k e $-k$.

Seja r a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

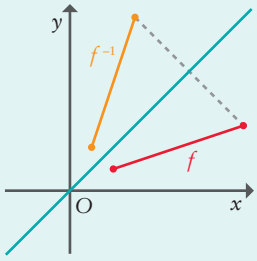
Sabe-se que a reta r tem declive -3.

Seja C o ponto da reta r que tem abcissa -1.

Determina o valor de k, sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é 20.

Relação entre o gráfico de um função f bijetiva e o gráfico da função f^{-1}

Se duas funções reais de variável real são inversas uma da outra, os respetivos gráficos são simétricos um do outro relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.



55. Para cada uma das seguintes funções, de domínio $[-4, 4]$, define analiticamente a função inversa e representa, no mesmo referencial o.n. xOy, o gráfico da função e o gráfico da sua inversa.

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{3x - 8}{4}$

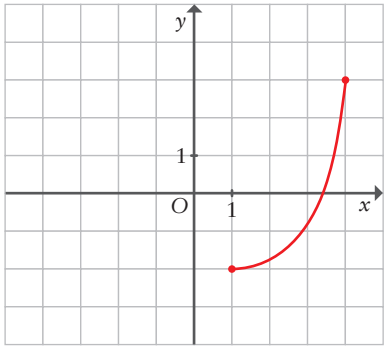
56. Seja $f : [-3, 5] \to [-5, 7]$ uma função bijetiva.

Sabe-se que, para certos valores de a e de b, com $a < 0$, a função inversa de f é definida por $f^{-1}(x) = ax + b$

a) Determina a e b.

b) Carateriza a função f.

57. Seja $f : [1, 4] \to [-2, 3]$ a função cujo gráfico está representado na figura seguinte.



a) Indica o valor de $f^{-1}(-1)$.

b) Representa o gráfico de f^{-1}.

Transformações de gráficos

Seja f uma função real de variável real.

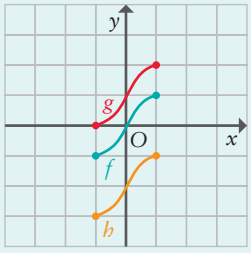
Exemplos:

1. Translação vertical

Seja k um número real.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) + k$.

Então, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(-k, 0)$.



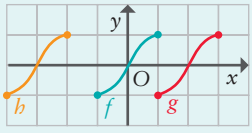
$g(x) = f(x) + 1$ $\quad h(x) = f(x) - 2$

2. Translação horizontal

Seja k um número real.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x + k)$.

Então, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{v}(-k, 0)$.



$g(x) = f(x - 2)$ $\quad h(x) = f(x + 3)$

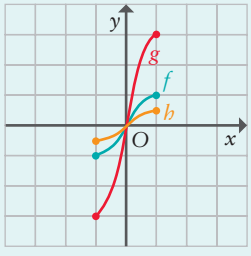
3. Dilatação e contração vertical

Seja k um número real positivo, diferente de 1.

Seja g a função definida por $g(x) = kf(x)$.

Tem-se:

- se $k > 1$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente k;
- se $0 < k < 1$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente k.



$g(x) = 3f(x)$ $\quad h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

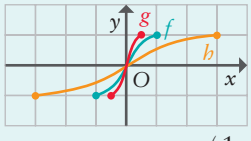
4. Dilatação e contração horizontal

Seja k um número real positivo, diferente de 1.

Seja g a função definida por $g(x) = f(kx)$.

Tem-se:

- se $0 < k < 1$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$;
- se $k > 1$, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.



$g(x) = f(2x)$ $\quad h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

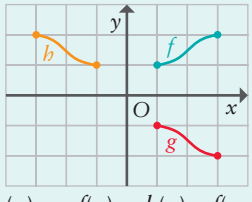
5. Reflexão de eixo Ox e reflexão de eixo Oy

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x)$.

Tem-se que o gráfico de g é obtido, a partir do gráfico de f, por meio de uma reflexão de eixo Ox.

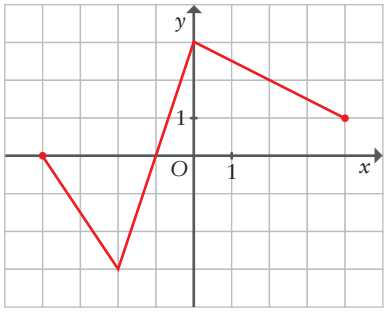
Seja h a função definida por $h(x) = f(-x)$.

Tem-se que o gráfico de h é obtido, a partir do gráfico de f, por meio de uma reflexão de eixo Oy.



$g(x) = -f(x)$ $\quad h(x) = f(-x)$

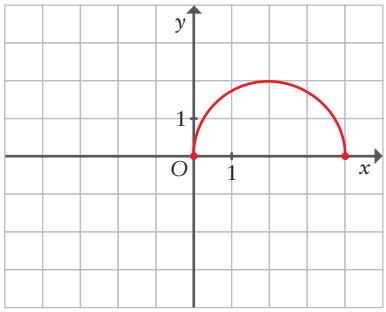
58. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função f de domínio $[-4, 4]$.



Representa o gráfico de cada uma das seguintes funções.

a) $g(x) = f(x) + 2$
b) $h(x) = f(x) - 1$
c) $i(x) = f(x + 1)$
d) $j(x) = f(x - 2)$
e) $k(x) = -f(x)$
f) $l(x) = f(-x)$

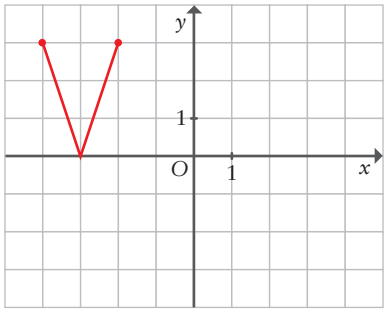
59. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função f de domínio $[0, 4]$.



Representa o gráfico de cada uma das seguintes funções.

a) $g(x) = f(x) + 1$
b) $h(x) = f(x) - 3$
c) $i(x) = f(x + 5)$
d) $j(x) = f(x - 1)$
e) $k(x) = -f(x)$
f) $l(x) = f(-x)$
g) $m(x) = 2f(x)$
h) $n(x) = \dfrac{f(x)}{2}$
i) $o(x) = f(2x)$
j) $p(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$
k) $q(x) = f(x - 2) + 1$
l) $r(x) = 3f(x) - 1$

60. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função f de domínio $[-4, -2]$.



Representa o gráfico da função g definida por

$g(x) = -2f\left(-\dfrac{x}{3} - 2\right) - 3$.

61. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Seja g a função cujo gráfico é o transformado do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{v}(3, 0)$.

Os gráficos das funções f e g intersetam-se num ponto.

Mostra que a função f não é injetiva.

Agora já podes realizar...

5 + 5 | Teste 4

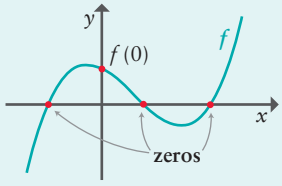
20 AULA DIGITAL ALUNO

www.mat10.te.pt

Imagem de zero e zeros de uma função

Dada uma função real de variável real:

- a **imagem de zero** (caso exista) é a ordenada do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas;
- os objetos cuja imagem é zero (caso existam, podem ser vários) são as abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abcissas; aos objetos cuja imagem é zero damos o nome de **zeros** da função.



62. Determina a imagem de zero e os zeros das seguintes funções.

a) $a(x) = \frac{4x}{3} + 6$

b) $b(x) = 4x^2 - 9$

c) $c(x) = x^2 - 8x + 16$

d) $d(x) = 2x^2 - 9x + 4$

e) $e(x) = x^2 + 2x$

f) $f(x) = x^3 - 4x^2$

g) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (sabendo que $g(1) = 0$)

h) $h(x) = x^3 + 6x^2 + 8x - 3$ (sabendo que a função h tem um zero inteiro)

63. Sejam p e q números reais. Seja g a função definida por $g(x) = x^2 + px + q$.
Determina o valor de p e de q , sabendo que $g(0) = -6$ e que 3 é um zero da função g .

64. Seja f a função definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a , b e c designam números reais.
Determina o valor de a , de b e de c , sabendo que a imagem de zero é 12 e que –2 e 1 são zeros da função.

65. Considera, num referencial o.n. xOy a elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Seja h a função definida por $h(x) = x^4 - x^3 - \frac{79}{9}x^2 + px + q$, onde p e q designam números reais.
Sabe-se que três dos quatro vértices da elipse pertencem ao gráfico da função h .
Determina a imagem de zero e os zeros da função h .

Sinal de uma função

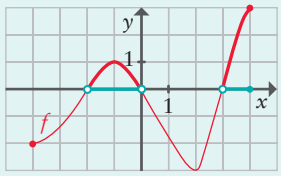
Dada uma função real de variável real e dado um conjunto A, contido no domínio da função, dizemos que:

- **a função é positiva em A se qualquer elemento de A tiver imagem positiva;**
- **a função é negativa em A se qualquer elemento de A tiver imagem negativa.**

Do ponto de vista gráfico, para vermos onde é que a função é

- **positiva, projetamos, no eixo das abcissas, a parte do gráfico que está acima deste eixo;**
- **negativa, projetamos, no eixo das abcissas, a parte do gráfico que está abaixo deste eixo.**

Exemplo:



$f(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in]-2, 0[\cup]3, 4]$

66. Considera a função f definida pela tabela ao lado.

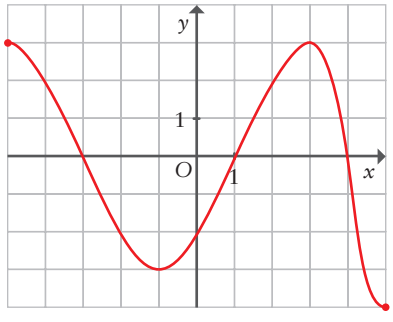
x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	8	0	–3	0	–1

a) Indica a imagem de zero e os zeros da função.

b) Indica o conjunto onde a função é positiva.

c) Indica o conjunto onde a função é negativa.

67. Na figura ao lado está, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função g de domínio $[-5, 5]$.



a) Indica a imagem de zero e os zeros da função.

b) Indica o conjunto onde a função é positiva.

c) Indica o conjunto onde a função é negativa.

68. Seja h a função que tem por gráfico a reta r que passa no ponto $P(-2, 3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(-1, 3)$.

a) Define analiticamente a função h.

b) Representa a reta r num referencial o.n. xOy.

c) Indica o conjunto onde a função é positiva.

d) Indica o conjunto onde a função é negativa.

69. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva em todo o seu domínio.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = g(x - 2)$.
A função h também é positiva em $\mathbb{R}$? Justifica a tua resposta.

70. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par tal que $f(0) = -2$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < -2$.
Indica qual das seguintes proposições é verdadeira:

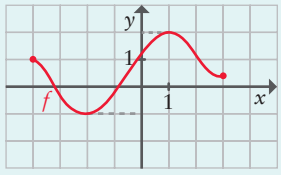
- «A função f é negativa em $\mathbb{R}$.»
- «A função f é negativa em $[0, +\infty[$ e é positiva em $]-\infty, 0[$.»

Funções limitadas

Dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, diz-se que:

- um número real m é **minorante** de f quando $\forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant m$;
- uma função é **minorada** quando admitir um minorante;
- um número real M é **majorante** de f quando $\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant M$;
- uma função é **majorada** quando admitir um majorante;
- uma função é **limitada** se for minorada e majorada, ou seja, se existirem m e M tais que $\forall x \in D_f,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Exemplo:



Função limitada
($\forall x \in D_f,\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 2$)

71. Considera o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Seja $f : A \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + 1$.

a) Determina o contradomínio da função f.

b) Justifica que a função f é limitada.

72. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 5$.
Justifica que a função g é limitada.

73. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 \leqslant g(x) \leqslant 4$.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = -2g(x) + 5$.
Justifica que a função h é limitada.

74. Sejam f, g, h e i as funções assim definidas:
$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$
$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\dfrac{1}{x}$
$h : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 4 - x^2$
$i : [-5, 6] \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = 2x + 4$
$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = x^3$
$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \dfrac{6}{|x| + 2}$

a) Indica quais destas funções são majoradas e indica, para cada uma, um majorante.

b) Indica quais destas funções são minoradas e indica, para cada uma, um minorante.

c) Indica quais destas funções são limitadas.

75. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos.
Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\forall x \in A,\ -4 < x < 6$.
Seja $g : B \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\forall x \in B,\ -1 < x < 8$.
Seja $h : A \cup B \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é a união dos gráficos das funções f e g.
Justifica que h é uma função limitada.

76. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada.
Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $D'_g \subset D'_f$. Justifica que a função g é limitada.

Monotonia

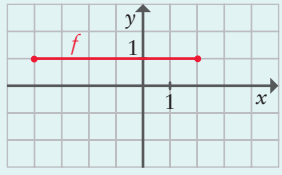
Dada uma função f, de domínio D_f, e um conjunto A contido em D_f, diz-se que:

- f é **constante em A** se todos os elementos de A tiverem a mesma imagem;
- f é **crescente em A** se $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) > f(a)$;
- f é **crescente em sentido lato em A** se $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) \geqslant f(a)$;
- f é **decrescente em A** se $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) < f(a)$;
- f é **decrescente em sentido lato em A** se $\forall a, b \in A, b > a \Rightarrow f(b) \leqslant f(a)$;
- f é **monónota em A** se for crescente em A ou for decrescente em A ;
- f é **monónota em sentido lato em A** se for crescente em sentido lato em A ou for decrescente em sentido lato em A.

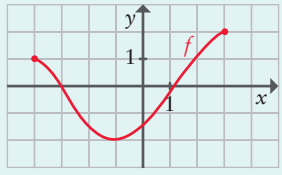
Uma função f diz-se:

- **crescente**, se for crescente em todo o seu domínio;
- **crescente em sentido lato**, se for crescente em sentido lato em todo o seu domínio;
- **decrescente**, se for decrescente em todo o seu domínio;
- **decrescente em sentido lato**, se for decrescente em sentido lato em todo o seu domínio.

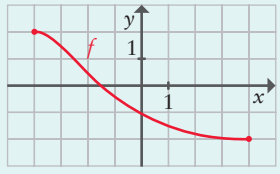
Exemplos:



Função constante



f é decrescente em $[-4, -1]$.
f é crescente em $[-1, 3]$.



Função decrescente

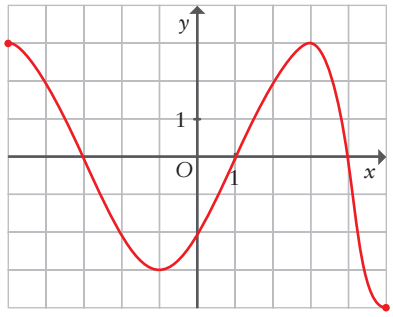
77. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Seja $f : A \to \mathbb{R}$ a função definida pela seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	–2	–1	9	9	8	5

Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) «A função f é crescente em $\{1, 2, 3\}$.»
b) «A função f é crescente em $\{1, 2, 3, 4\}$.»
c) «A função f é crescente em sentido lato em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.»
d) «A função f é crescente em sentido lato em $\{2, 3, 4\}$.»
e) «A função f é decrescente em $\{4, 5, 6\}$.»
f) «A função f é decrescente em $\{3, 4, 5\}$.»
g) «A função f é decrescente em sentido lato em $\{3, 4, 5, 6\}$.»
h) «A função f é constante em $\{3, 4\}$.»

78. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função g de domínio $[-5, 5]$.



Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) «A função f é crescente em $[-1, 3]$.»

b) «A função f é decrescente em $[-5, -1]$.»

c) «A função f é decrescente em $[-4, -2]$.»

d) «A função f é crescente em sentido lato em $[-1, 4]$.»

e) «A função f é decrescente em $[-5, -1] \cup [3, 5]$.»

79. Considera o conjunto $A = [-3, 4]$.

Para cada uma das alíneas seguintes, representa, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função de domínio A que seja:

a) crescente e negativa.

b) decrescente e positiva.

c) não injetiva e decrescente em sentido lato.

d) decrescente em $[-3, 0]$, constante em $[0, 2]$ e crescente em $[2, 4]$.

80. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente. Sabe-se que $g(3) = 5$.

Qual dos valores seguintes pode ser imagem de 1 por meio da função g?

(A) 4 **(B)** -5 **(C)** 8 **(D)** 3

81. Mostra que:

a) a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 4$ é crescente;

b) a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x + 2$ é decrescente.

82. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = -f(x)$. Justifica que a função g é crescente.

Extremos

Seja f uma função e seja a um valor pertencente ao domínio de f.

Diz-se que:

- $f(a)$ é o **mínimo absoluto** da função se $f(a)$ for a menor das imagens;
- $f(a)$ é o **máximo absoluto** da função se $f(a)$ for a maior das imagens;
- f atinge um **mínimo relativo** (ou **local**) em a se existir uma vizinhança de a tal que a imagem de f é a menor das imagens, considerando todos os objetos pertencentes a essa vizinhança; diz-se então que **$f(a)$ é um mínimo relativo** (ou **local**) da função f e que **a é um minimizante** de f;

continua ▶

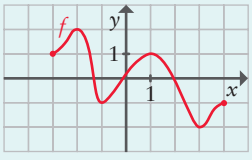
continuação

- f atinge um **máximo relativo** (ou **local**) em a se existir uma vizinhança de a tal que a imagem de a é a maior das imagens, considerando todos os objetos pertencentes a essa vizinhança; diz-se então que $f(a)$ **é um máximo relativo** (ou **local**) da função f e que a **é um maximizante** de f.

Dá-se o nome de:

- **extremo absoluto** a um máximo ou um mínimo absoluto;
- **extremo relativo** (ou **local**) a um máximo ou um mínimo relativo.

Exemplo:



2 é o máximo absoluto da função.
–2 é o mínimo absoluto da função.
A função atinge um mínimo relativo em –3, em –1 e em 3.
A função atinge um máximo relativo em –2, em 1 e em 4.

83. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Seja $f : A \to \mathbb{R}$ definida pela tabela ao lado.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	–1	–3	0	5	1

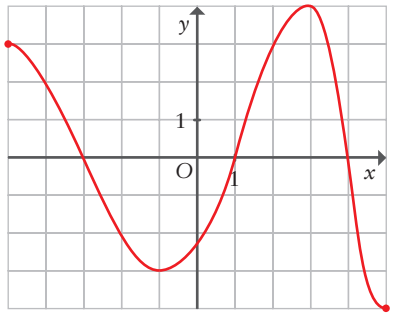
a) Indica o contradomínio da função f.
b) A função f tem um mínimo absoluto. Indica o seu valor.
c) A função f tem um máximo absoluto. Indica o seu valor.

84. Seja $g : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = 4 - 2x$.
a) Indica o contradomínio da função g.
b) A função g tem dois extremos absolutos. Indica-os.

85. Representa, sob a forma de um intervalo, cada uma das seguintes vizinhanças.
a) $V_2(5)$ **b)** $V_1(-4)$ **c)** $V_{0,25}\left(\frac{3}{4}\right)$

86. Determina, na forma de um intervalo, o resultado de cada uma das seguintes interseções.
a) $[-3, 5] \cap V_2(4)$ **b)** $[-4, +\infty[\cap V_1(-4)$

87. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função f de domínio $[-5, 5]$.



Indica:
a) o contradomínio da função f;
b) o máximo absoluto da função f;
c) o mínimo absoluto da função f;
d) os máximos relativos da função f e respetivos maximizantes;
e) os mínimos relativos da função f e respetivos minimizantes.

88. Sejam a e b números reais ($a > 0$) e seja n um número natural par.

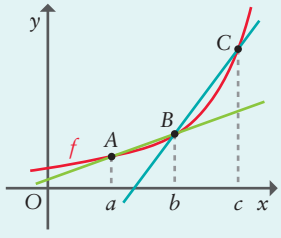
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^n - b$.

Mostra que $-b$ é o mínimo absoluto da função f.

Concavidades

Dada uma função real de variável real f e um intervalo I contido no domínio de f, diz-se que:

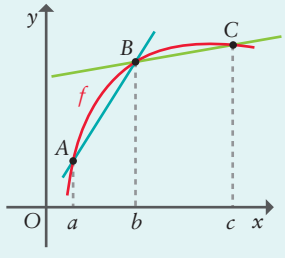
- **o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I se, dados quaisquer três pontos A, B e C do gráfico, de abcissas a, b e c pertencentes a I e tais que $a < b < c$, o declive da reta AB é inferior ao da reta BC;**
- **o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I se, dados quaisquer três pontos A, B e C do gráfico, de abcissas a, b e c pertencentes a I e tais que $a < b < c$, o declive da reta AB é superior ao da reta BC.**



Concavidade voltada para cima

Propriedades:

- **O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para cima num dado intervalo I contido no domínio de f se e só se, dados quaisquer dois pontos A e B do gráfico de f, de abcissas a e b pertencentes a I, a parte do gráfico de abcissas estritamente situadas entre a e b ficar abaixo do segmento de reta $[AB]$.**
- **O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para baixo num dado intervalo I contido no domínio de f se e só se, dados quaisquer dois pontos A e B do gráfico de f, de abcissas a e b pertencentes a I, a parte do gráfico de abcissas estritamente situadas entre a e b ficar acima do segmento de reta $[AB]$.**



Concavidade voltada para baixo

89. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 5x^2$.

a) Sejam A e B dois pontos do gráfico de f de abcissas a e b, respetivamente, com $a < b$.

Mostra que o declive da reta AB é dado por $5a + 5b$.

b) Sejam P, Q e R três pontos do gráfico da função f, de abcissas p, q e r, respetivamente, com $p < q < r$.

Justifica que o declive da reta PQ é menor que o declive da reta QR. O que podes concluir acerca do sentido da concavidade do gráfico da função f?

90. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = -3x^2 + 2x + 6$.

Justifica que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

4. Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções

Funções polinomiais

Dá-se o nome de função polinomial a uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma variável.

91. Das expressões analíticas seguintes, indica as que definem funções polinomiais.

(A) $\frac{x^3}{2} - \sqrt{3}x^2 + \frac{4}{5}x - 9$

(B) $\sqrt{2}x$

(C) $x^2 + (\sqrt{x^2+1} + 3)^2 - 6\sqrt{x^2+1}$

(D) $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

Função quadrática

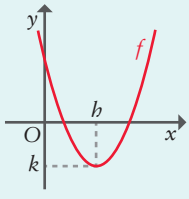
Chama-se função quadrática a toda a função real de variável real que pode ser definida por um polinómio de grau 2, ou seja, por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais, sendo $a \neq 0$.

Quando uma função quadrática não modela uma situação concreta e nada é indicado em contrário, assume-se que a função tem domínio $\mathbb{R}$.

A expressão $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ pode ser escrita na forma $a(x-h)^2 + k$.

O gráfico de uma função definida por uma expressão deste tipo é uma parábola de vértice (h, k).

A parábola tem a concavidade voltada cima se $a > 0$, e voltada para baixo se $a < 0$. A reta de equação $x = h$ é eixo de simetria da parábola.

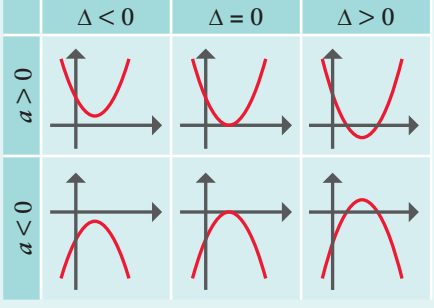


Os zeros de uma função definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ podem ser obtidos recorrendo à fórmula resolvente de uma equação do segundo grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

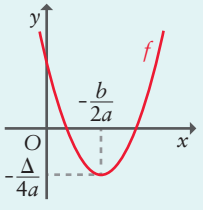
É habitual designar a expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (delta).

Consoante o sinal de a e o valor de Δ, têm-se as seis situações ao lado, relativamente ao sentido da concavidade do gráfico e da posição deste em relação ao eixo Ox.



Propriedades:

- **as coordenadas do vértice da parábola são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$;**
- quando o função tem dois zeros, a abcissa do vértice da parábola é igual à média aritmética dos zeros.



92. Seja f a função quadrática que tem por gráfico a parábola cujo vértice é o ponto $V(5, -4)$ e que passa pelo ponto $P(3, 8)$.

a) Define analiticamente a função f através de uma expressão da forma $a(x-h)^2 + k$.

b) Indica uma equação do eixo de simetria da parábola.

c) Indica as coordenadas do ponto Q, simétrico de P relativamente ao eixo de simetria da parábola.

93. Seja f a função definida por $f(x) = x^2 - 4$.

a) Indica:

a₁) os zeros da função f;

a₂) as coordenadas do vértice, uma equação do eixo de simetria e o sentido da concavidade do gráfico da função f.

b) Seja a um número real positivo e seja g a função definida por $g(x) = af(x)$.

b₁) Indica os zeros da função g.

b₂) Qual é o sentido da concavidade do gráfico da função g?

b₃) Determina o valor de a, sabendo que a ordenada do vértice do gráfico da função g é -12.

c) Seja h um número real e seja i a função definida por $i(x) = g(x-h)$.

c₁) Indica o sentido da concavidade do gráfico da função i.

c₂) Determina o valor de h e o maior zero da função i, sabendo que o menor zero é 3.

c₃) Determina as coordenadas do vértice do gráfico da função i.

d) Seja k um número real e seja j a função definida por $j(x) = i(x) + k$.

d₁) Calcula o valor de k, sabendo que a ordenada do vértice do gráfico da função j é -3.

d₂) Define analiticamente a função j, através de um polinómio da forma $ax^2 + bx + c$.

d₃) Seja P o ponto de interseção do gráfico da função j com o eixo Oy e sejam Q e R os pontos de interseção do gráfico da função j com o eixo Ox. Determina a área do triângulo $[PQR]$.

94. Seja f a função definida por $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$.

a) Seja A o vértice do gráfico da função f. Indica as coordenadas do ponto A.

b) Considera a circunferência de centro no ponto O, origem do referencial, e que passa em A.

b₁) Escreve uma equação desta circunferência.

b₂) O eixo de simetria do gráfico da função f interseta esta circunferência no ponto A e num outro ponto. Seja B esse ponto. Determina as coordenadas do ponto B.

b₃) Seja C o ponto do eixo Ox tal que o quadrilátero $[OABC]$ é um losango. Determina a área desse losango.

95. Considera a função g definida por $g(x) = 4x^2 - 12x + 3$.

a) Escreve a expressão analítica da função g na forma $a(x-h)^2 + k$.

b) Seja P o vértice do gráfico da função g. Seja r a reta que passa por O, origem do referencial, e por P. A reta r interseta a parábola no ponto P e num outro ponto. Seja Q esse ponto.

Determina as coordenadas do ponto Q.

c) Escreve uma equação da parábola que tem por vértice o ponto Q e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 12.

96. Seja g a função definida por $g(x) = x^2 - 3x + 4$.

a) Determina as coordenadas do vértice da parábola que é a representação gráfica da função g .

b) Escreve uma equação do eixo de simetria dessa parábola.

c) Sejam A e B os pontos da parábola de abcissas 1 e 3, respetivamente. Seja r a reta paralela à reta AB e que passa no ponto O , origem do referencial. A reta r interseta a parábola num ponto C . Determina a área do quadrilátero $[OABC]$.

97. De uma função quadrática f , sabe-se que:

- o vértice do gráfico tem ordenada -3;
- a função é decrescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e é crescente no intervalo $[-1, +\infty[$;
- 2 é um dos zeros da função.

a) Sem efetuar cálculos, indica:

a$_1$) a abcissa do vértice do gráfico da função f ;

a$_2$) uma equação do eixo de simetria do gráfico da função f ;

a$_3$) o sentido da concavidade do gráfico da função f ;

a$_4$) os zeros da função f ;

a$_5$) o conjunto-solução da inequação $f(x) < 0$.

b) Determina:

b$_1$) uma expressão analítica que defina a função f ;

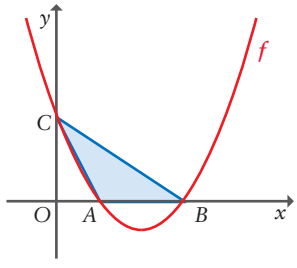
b$_2$) as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas.

98. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função quadrática f .

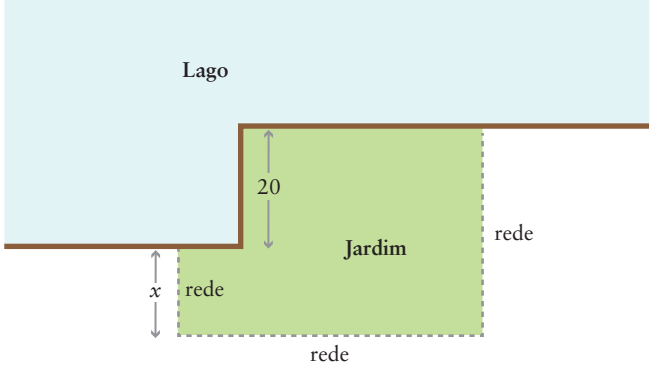
Tal como a figura sugere, o gráfico interseta o eixo Ox nos pontos A e B e o eixo Oy no ponto C .

Sabe-se que a abcissa de A é 1, que a abcissa de B é 3 e que a área do triângulo $[ABC]$ é 4.

Determina as coordenadas do vértice do gráfico da função.



99. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra. Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.
Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura, da página anterior, estão expressas em metros. Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim. Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

a) Mostra que a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por $a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$.

b) Determina o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determina essa área máxima.

in *Teste Intermédio*, GAVE

Inequações do segundo grau

Para resolver uma inequação do segundo grau, podemos percorrer as seguintes etapas:

1.ª etapa: desembaraça-se a inequação de parêntesis e de denominadores (quando os houver);

2.ª etapa: passam-se todos os termos para o primeiro membro, ficando o segundo membro igual a zero;

3.ª etapa: estuda-se, quanto ao sinal, a função quadrática definida pela expressão que ficou no primeiro membro (depois de simplificada);

4.ª etapa: apresenta-se o conjunto-solução da inequação.

100. Determina o conjunto-solução de cada uma das seguintes inequações.

a) $3x^2 - 26 < 1$ **b)** $4x^2 > 9$ **c)** $3x - \frac{x^2}{5} > 0$

d) $3x^2 - 11 \leqslant 4$ **e)** $x^2 + 7 \geqslant 5x$ **f)** $3x^2 + 12x + 12 \leqslant 0$

g) $4x - 5 \geqslant x^2$ **h)** $(x + 2)^2 - (2x - 1)(2x + 1) \geqslant 5$

101. Numa certa oficina de automóveis, entre as oito horas da manhã e as oito horas da noite, existem gases tóxicos misturados no ar. Admite que, num certo dia, a quantidade, em litros, de gases tóxicos misturados no ar, às t horas desse dia é dada por:

$$g(t) = \frac{1}{48}t^2 + \frac{1}{6}t, \qquad t \in [8, 20]$$

a) Nesse dia, que quantidade de gás tóxico misturado no ar existia na oficina ao meio-dia?

b) Nessa oficina, quando existem mais de 8 litros de gases tóxicos misturados no ar, o ambiente torna-se irrespirável e muito prejudicial à saúde. Nesse dia, a partir de que horas é que o ambiente se tornou irrespirável na oficina?

102. Para cada número real m, considera a função f definida por $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 3x + 1$.

Determina os valores de m para os quais:

a) a função f não é uma função quadrática;

b) a função f tem um único zero;

c) a função f é sempre positiva;

d) a função f tem dois zeros e é negativa entre eles.

Função cúbica

Chama-se função cúbica a toda a função real de variável real que pode ser definida por um polinómio de grau 3, ou seja, por uma expressão do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d são constantes reais, sendo $a \neq 0$.

Quando uma função cúbica não modela uma situação concreta e nada é indicado em contrário, assume-se que a função tem domínio $\mathbb{R}$.

Neste caso, tal como os gráficos abaixo representados sugerem, prova-se que:

- **as funções cúbicas têm contradomínio $\mathbb{R}$;**
- **as funções cúbicas têm, no mínimo, um zero, e, no máximo, três zeros;**
- **se $a > 0$, o gráfico começa por ter a concavidade voltada para baixo, para depois ficar voltada para cima;**
- **se $a < 0$, o gráfico começa por ter a concavidade voltada para cima, para depois ficar voltada para baixo.**

103. Das expressões seguintes, indica as que definem funções cúbicas e, para cada uma dessas, considerando-a na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$, indica os valores de a, b, c e d.

a) $2x^3 - x + 1$ **b)** $\dfrac{1}{x^3 + 1}$ **c)** $\dfrac{x(x-1)^2}{5}$

d) $x^2(x-1) - (x^2-1)x$ **e)** $(x^2 - 2x)^2 - x(x^3 + 1)$ **f)** $(2x-1)^3$

104. Determina o(s) zero(s) da função cúbica f definida por:

a) $f(x) = x^3 - 8$ **b)** $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{3}$ **d)** $f(x) = 2(x+1)(2-x)(x-3)$

e) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{2}$ **f)** $f(x) = (x^2+1)(x+3)$

g) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$ **h)** $f(x) = 4x^2 - x^3 - 5x + 2$

105. Define analiticamente uma função polinomial f, de grau 3, sabendo que:

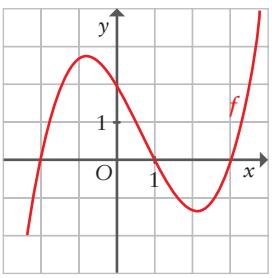
a) -2, 1 e 2 são os zeros de f e que $f(-1) = 4$.

b) o polinómio $f(x)$ tem uma raiz de multiplicidade 2 igual a -1, uma raiz simples igual a 2 e que o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x + 3$ é 10.

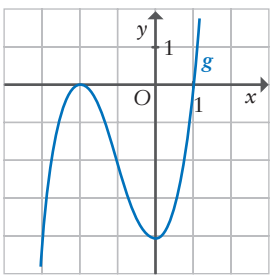
c) o polinómio $f(x)$ tem apenas a raiz 0 e que o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x + 1$ é 2.

106. Define analiticamente cada uma das funções cúbicas representadas graficamente em referencial o.n. xOy.

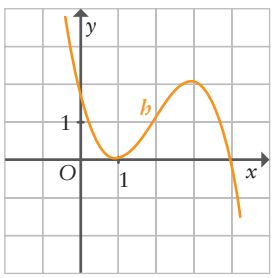
a)



b)

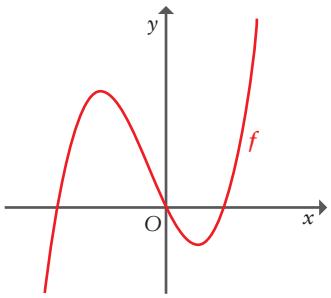


c)

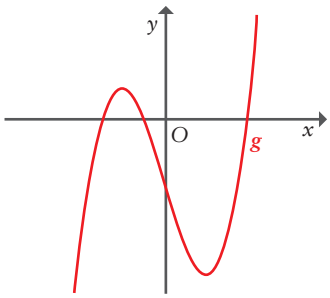


107. Seja a um número real não nulo. Em cada alínea, a função que está definida analiticamente não pode ser a que está representada graficamente. Explica porquê.

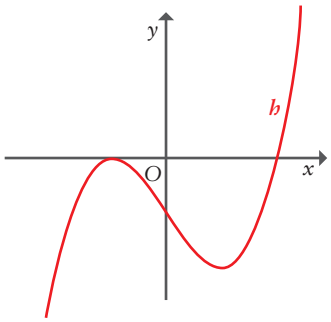
a) $f(x) = x(x - a)(x + a)$



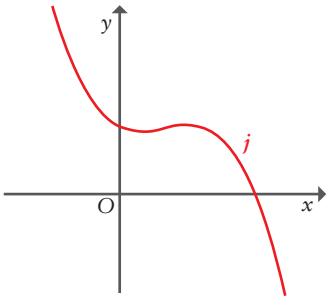
b) $g(x) = (x - a + 1)(x - a)(x - a - 1)$



c) $h(x) = (x - a)(x^2 + 1)$



d) $j(x) = a(x - a)(x^2 + 1)$



Inequações do terceiro grau

Para resolver uma inequação do terceiro grau, podemos percorrer as seguintes etapas:

1.ª etapa: desembaraça-se a inequação de parêntesis e de denominadores (quando os houver);

2.ª etapa: passam-se todos os termos para o primeiro membro, ficando o segundo membro igual a zero;

3.ª etapa: fatoriza-se a expressão que ficou no primeiro membro (depois de simplificada);

4.ª etapa: faz-se um quadro de zeros e sinais;

5.ª etapa: apresenta-se o conjunto-solução da inequação.

108. Determina o conjunto-solução de cada uma das inequações seguintes.

a) $x^3 < 4x$

b) $(1 - x^2)(x + 2) \geqslant 0$

c) $x^3 + 8 > 0$

d) $x(x^2 - 2) \geqslant x^2$

e) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \leqslant x^3 - x$

f) $(2 - x)(x - 3)^2 < 0$

g) $2x^3 + 2 < (x + 1)^2$

109. Seja a um número real negativo e seja f a função polinomial definida por $f(x) = a(x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

Qual é o conjunto-solução da condição $f(x) > 0$?

110. Cada uma das funções que a seguir se definem tem pelo menos dois zeros que são números inteiros.

Determina, para cada uma delas, os zeros e o conjunto-solução da condição $f(x) \leqslant 0$.

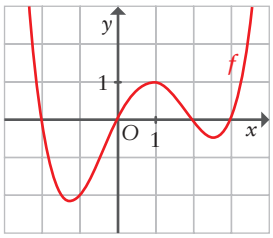
a) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$

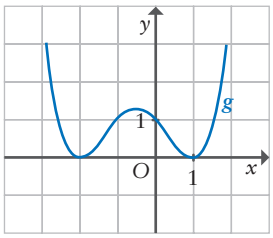
c) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^3$

111. Define analiticamente cada uma das funções polinomiais de grau 4 representadas graficamente em referencial o.n. xOy .

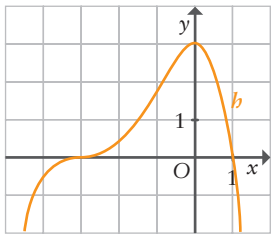
a)



b)



c)



112. Sejam a e b números reais e seja f a função definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9$. Sabe-se que 1 é zero da função f e que o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x + 1$ é -4.

a) Determina a e b .

b) Admite que $a = 2$ e que $b = 7$.

b₁) Fatoriza o polinómio $f(x)$.

b₂) Constrói um quadro de variação de sinal da função f .

b₃) Esboça o gráfico da função f num referencial o.n. xOy .

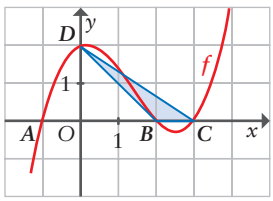
b₄) Seja k um número real e seja h a função definida por $h(x) = f(x) + k$. Determina o conjunto dos valores de k para os quais a função h tem um único zero e esse zero é um número negativo.

113. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = x^3 + x^2 - 4x$ e $g(x) = 2x(x - 1)$.

a) Determina as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g .

b) Os pontos que determinaste na alínea a) são vértices de um polígono. Determina a sua área e o seu perímetro.

114. Seja f a função definida por $f(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{3}$, parcialmente representada no referencial da figura ao lado. Os pontos A , B , C e D pertencem ao gráfico da função f e pertencem aos eixos coordenados.



a) Determina a área do triângulo $[BCD]$.

b) Sejam h e j as funções definidas por $h(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e por $j(x) = f(-x)$. Quais são os zeros de h e quais são os zeros de j ?

c) Seja k um número real e seja t a função definida por $t(x) = f(x - k)$. Determina o conjunto dos valores de k para os quais a função t tem um zero positivo e dois zeros negativos.

d) Considera a reta que passa no ponto A e no ponto do gráfico de f que tem abcissa 1. Essa reta interseta o gráfico de f num outro ponto. Determina as coordenadas desse ponto sem recorrer à calculadora.

115. Considera a função polinomial g definida por $\frac{8x^2 + 10x - 2x^3}{5}$. Um ponto P desloca-se sobre o gráfico de g entre a origem do referencial e o ponto cuja abcissa é o zero positivo de g, nunca coincidindo com qualquer destes pontos. A cada posição do ponto P corresponde um ponto Q, no eixo das ordenadas, de modo que o triângulo $[OPQ]$ é sempre um triângulo isósceles, com $\overline{OP} = \overline{PQ}$. Seja x a abcissa do ponto P.

Define analiticamente a função que dá a área do triângulo $[OPQ]$ em função de x e, recorrendo à calculadora, determina o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

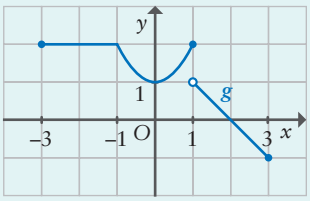
Desenha um esboço do gráfico que visualizaste na calculadora e apresenta o valor pedido arredondado às décimas.

Funções definidas por ramos

Diz-se que uma função está definida por ramos quando está definida através da apresentação de expressões correspondentes a diferentes partes do seu domínio.

Exemplo:

A função $g : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant -2 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ -x + 2 & \text{se } x \in]1, 3] \end{cases}$ está definida por ramos e está representada graficamente no referencial o.n. ao lado.



116. Seja $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$

Determina $D'f$.

117. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{se } x \text{ é irracional} \\ \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}$

a) Determina $g(-1)$, $g(\sqrt{4})$, $g(\sqrt{5})$, $g\left(\frac{6}{5}\right)$, $g\left(\frac{1}{\pi}\right)$ e $g\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right)$.

b) Determina os objetos cujas imagens por g são, respetivamente, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$ e $-\frac{1}{4}$.

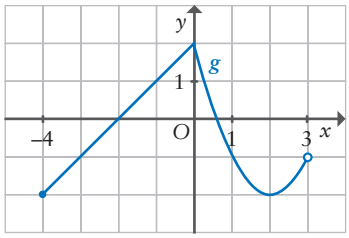
118. Considera a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

a) Determina $f(-\sqrt{2})$, $f(\sqrt{2})$, $f(3)$ e $f(a^2 + 2)$, sendo a um número real qualquer.

b) Resolve a equação $f(x) = 8$.

c) Representa graficamente a restrição da função f ao intervalo $[-2, 3]$ e indica $D'f[-2, 3]$.

119. Considera a função g representada graficamente. O gráfico ao lado é a reunião de um segmento de reta com parte de uma parábola de vértice no ponto de coordenadas $(2, -2)$.



a) Determina os conjuntos-solução de cada uma das condições:

a₁) $g(x) = -1$

a₂) $g(x) < -1$

b) Indica o número de soluções da equação $g(x) = g(-\pi)$.

c) Indica um intervalo em que g seja injetiva.

d) Constrói uma tabela de variação (monotonia e extremos) para a função g.

e) Define analiticamente a função g.

120. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

Sejam A e B os pontos em que o gráfico de h interseta o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas, respetivamente.

Seja P o ponto de coordenadas $(2, 0)$. Considera a reta que passa em P e é paralela à reta AB. Sejam C e D os pontos de abcissa positiva em que essa reta interseta o gráfico de h.

Determina a área do triângulo $[BCD]$.

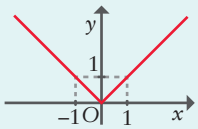
Função módulo

O módulo de um número real é:

- **o próprio número, se o número for maior ou igual a zero;**
- **o simétrico do número, se o número for menor do que zero.**

O gráfico da função definida por $f(x) = |x|$ é:

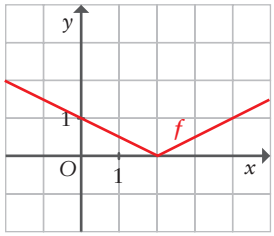
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

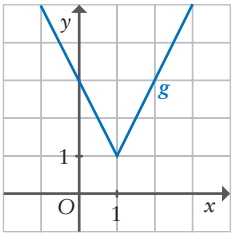


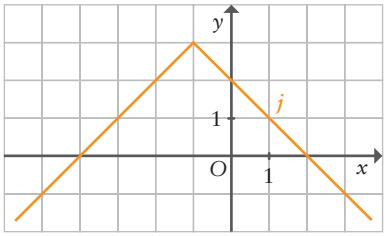
De um modo geral:

Dados números reais a, h e k, $a \neq 0$, o gráfico da função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é a união de duas semirretas com a mesma origem, a qual se designa por vértice e cujas coordenadas são (h, k). As semirretas «apontam» para cima se $a > 0$, e «apontam» para baixo se $a < 0$. O gráfico tem um eixo de simetria, que é a reta de equação $x = h$.

121. As três funções representadas graficamente podem ser definidas por expressões da forma $a|x-h|+k$ com a, h e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.







Define cada uma delas por uma expressão dessa forma.

122. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = -2|x-1|+1$ e $g(x) = |2x-3|-2$. Define analiticamente cada uma delas sem usar «módulo».

123. A função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3-|5-2x|$, pode ser definida por uma expressão da forma $f(x) = a|x-h|+k$, com a, h e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Define f por uma expressão dessa forma e representa-a graficamente.

Função composta de duas funções das quais uma é a função módulo

Dada uma função f, de domínio D_f, tem-se:

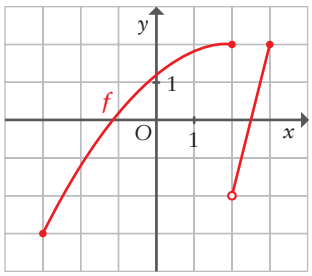
$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ f(x) & \text{se } f(x) \geqslant 0 \end{cases}, \text{ para } x \in D_f \qquad f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}, \text{ para } x \text{ tal que } |x| \in D_f$$

124. Seja f a função, de domínio $[-4, 4]$, definida por $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{se } -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2 & \text{se } 0 < x \leqslant 4 \end{cases}$

a) Representa graficamente a função f.

b) Sejam g e j as funções definidas por $g(x) = |f(x)|$ e $j(x) = f(|x|)$. Representa graficamente as funções g e j e define-as analiticamente sem usar «módulo».

125. Seja f a função representada graficamente no referencial seguinte.



Representa graficamente as funções g e j definidas por $g(x) = |f(x)|$ e $j(x) = f(|x|)$.

Equações e inequações envolvendo a função módulo

Seja a um número real maior ou igual a zero.

Têm-se as seguintes equivalências (para qualquer número real x):

- $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$
- $|x| < a \Leftrightarrow x > -a \wedge x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$

Se a é um número real negativo, as condições $|x| = a$ e $|x| < a$ são as condições impossíveis e a condição $|x| > a$ é uma condição universal.

Em geral, dado um número real a maior ou igual a zero e uma função f de domínio D_f, têm-se as seguintes equivalências (para qualquer x pertence a D_f):

- $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$
- $|f(x)| < a \Leftrightarrow f(x) > -a \wedge f(x) < a$
- $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a$

Exemplo:

$$|x^2 - 1| < 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 > -3 \wedge x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow x^2 + 2 > 0 \wedge x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 < x < 2 \qquad CS =]-2, -2[$$

126. Determina o conjunto-solução de cada uma das condições seguintes.

a) $|x| = 2$ **b)** $|x| - 3 = \sqrt{2}$ **c)** $|x| + 3 = \sqrt{2}$

d) $|x^3| = 8$ **e)** $|1 - 2x| - 3 = 0$ **f)** $|x - 1| = 2 - 3x$

g) $|5x - 1| = |7x + 5|$ **h)** $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ **i)** $|x| < \sqrt{2}$

j) $\left|1 - \frac{x}{2}\right| - 3 \geqslant 0$ **k)** $|2x| + 4 > 0$ **l)** $|-2x| < 4$

m) $|x^2 + 1| - 5 \geqslant 0$ **n)** $4 - |2x - 3| \geqslant 1$ **o)** $|x^2 - 5| \leqslant 4$

p) $|x^2 + 5x - 3| > 3$ **q)** $|x^2 - 3x + 5| \leqslant 2$ **r)** $|2x^2 + 5x + 3| \leqslant 3$

s) $|2x - 5| > |2x + 1|$ **t)** $|2x - 5| > |3x + 1|$

127. Considera as funções f e g definidas por $f(x) = |x + 2|$ e por $g(x) = |4 - 2x|$.

Resolve, por métodos analíticos e por métodos gráficos, as condições $f(x) = g(x)$ e $f(x) > g(x)$.

128. Sejam a e b números reais não nulos. Determina os valores de a e b sabendo que 1 e 3 são soluções da condição $|ax - b| = 4$.

129. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{|5x - 20|}{2} - 3$.

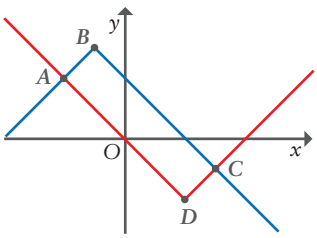
a) Esboça o gráfico da função f num referencial o.n. xOy e determina a área do triângulo cujos vértices são os pontos em que o gráfico de f interseta os eixos coordenados.

b) Estuda a função quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.

c) Determina o contradomínio da função g definida por $g(x) = 2 - f(x + 3)$.

130. No referencial o.n. da figura ao lado, estão representadas as funções f e g definidas por $f(x) = |x - 2| - 2$ e $g(x) = 3 - |x + 1|$.

Justifica que $[ABCD]$ é um retângulo e determina a sua área.



131. Seja $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = |2x + 1|$.

a) Representa graficamente a função f num plano em que está fixado um referencial o.n. xOy.

b) Justifica que f é uma função limitada.

c) Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 3$ e sejam C e D os pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 5$. Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

d) Seja h a função definida por $h(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 3$.

d₁) Representa graficamente a função h num referencial do plano.

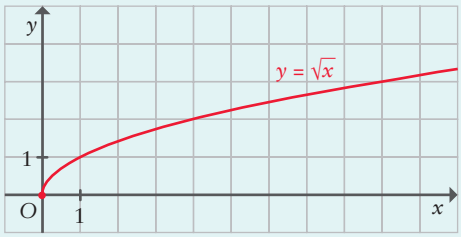
d₂) Indica os intervalos maximais de monotonia de h e identifica os seus extremos.

Função raiz quadrada

Dá-se o nome de função raiz quadrada à função de domínio e conjunto de chegada $[0, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Esta função é a função inversa da função $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por $g(x) = x^2$.

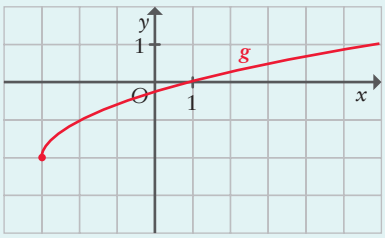
O gráfico desta função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ encontra-se representado ao lado.



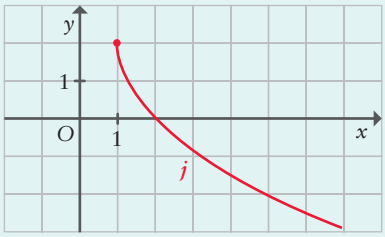
A partir deste gráfico, podemos obter o gráfico de qualquer função definida por uma expressão do tipo $y = a\sqrt{x - h} + k$, com a, h e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Exemplos:

- $g(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

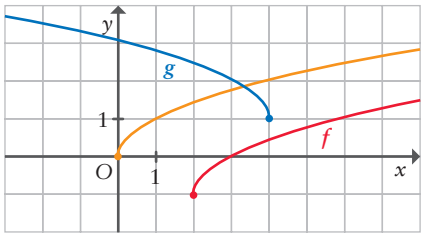


- $j(x) = -2\sqrt{x - 1} + 2$



132. No referencial está representada, a cor de laranja, parte do gráfico da função $y = \sqrt{x}$.

Define analiticamente as funções f e g cujos gráficos se podem obter a partir desse gráfico por translações e/ou reflexões.



133. Sejam h, k, j e t as funções sobrejetivas assim definidas:

$D_h = [-2, +\infty[$ e $h(x) = \sqrt{x+2} - 1$

$D_k =]-\infty, 0]$ e $k(x) = x^2$

$D_j =]-\infty, 4]$ e $j(x) = 1 + \sqrt{4-x}$

$D_t = [1, +\infty[$ e $j(x) = 2 - (x-1)^2$

Caracteriza a função inversa de cada uma destas funções.

Resolução de equações e inequações irracionais envolvendo radicais quadráticos

Na resolução de equações, é comum substituirmos a equação dada por outra equivalente e assim sucessivamente até obtermos uma equação equivalente à primeira e cujo conjunto-solução conseguimos de imediato identificar.

No que respeita às equações irracionais, nem sempre é assim, pois, dados números reais a e b, se $a = b$, então $a^2 = b^2$, mas o facto de se ter $a^2 = b^2$ não garante $a = b$.

Assim, quando elevamos os dois membros de uma equação ao quadrado, podemos não obter uma equação equivalente à inicial. Mas podemos garantir que o conjunto-solução da primeira está contido no conjunto-solução da segunda e, portanto, o que fazemos é verificar quais das soluções da equação obtida depois de elevarmos os dois membros ao quadrado também são solução da equação inicial.

No caso de resolvermos inequações irracionais, dado que não é possível fazer a «verificação» das soluções, procuramos obter sempre condições equivalentes.

Exemplo:

$\sqrt{10-2x} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{10-2x} = x - 5 \Rightarrow (\sqrt{10-2x})^2 = (x-5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - 2x = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5$

Como não temos a garantia de a condição $x = 3 \vee x = 5$ ser equivalente à equação inicial, vamos verificar se, na realidade, 3 e 5 satisfazem a equação dada.

Substituindo, na equação inicial, x por 3 obtemos $\sqrt{10 - 2 \times 3} = 3 - 5$, que é equivalente a $\sqrt{4} = -2$. Trata-se de uma proposição falsa e, portanto, 3 não é solução da equação.

Substituindo, na equação inicial, x por 5 obtemos $\sqrt{10 - 2 \times 5} = 5 - 5$, que é equivalente a $\sqrt{0} = 0$. Trata-se de uma proposição verdadeira e, portanto, 5 é solução da equação.

O conjunto-solução da equação $\sqrt{10-2x} + 5 = x$ é $\{5\}$.

134. Determina o conjunto-solução de cada uma das condições seguintes.

a) $\sqrt{3-2x}=3$ **b)** $\sqrt{2x-1}=x$ **c)** $\sqrt{2x+1}+3=0$

d) $\sqrt{3x+1}-1=x$ **e)** $\sqrt{1-2x}-\sqrt{x+13}=0$ **f)** $2x+\sqrt{2-x}=1$

g) $2x=5-\sqrt{x^2+2x-15}$ **h)** $\sqrt{x^2}=x$ **i)** $\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$

j) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=0$ **k)** $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$ **l)** $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2-x}=0$

m) $\sqrt{x+1}\leqslant 3$ **n)** $2-\sqrt{1-x}<4$ **o)** $1-\sqrt{2x+1}>x$

p) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}>0$ **q)** $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}>0$ **r)** $\sqrt{x}\geqslant x$

135. Seja a um número real e seja g a função definida por $g(x)=\sqrt{x-a}+2$.

a) Determina a sabendo que o gráfico de g num referencial o.n. xOy interseta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 4.

b) Considera $a=-4$.

b₁) Determina a abcissa do ponto do gráfico de g que tem ordenada 3.

b₂) Determina as coordenadas do ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.

136. Sejam h e j as funções definidas por $h(x)=x-1$ e $j(x)=\sqrt{5+x}$, de domínios $\mathbb{R}$ e $[-5,+\infty[$, respetivamente.

a) Prova que as funções h e j não são permutáveis, ou seja, prova que $h\circ j\neq j\circ h$.

b) Resolve a equação $h(x)=j(x)$ e interpreta a solução em termos de representação gráfica.

137. A igualdade $p=a\sqrt{x}+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$ relaciona o preço, em euros, que um fornecedor cobra por cada unidade numa encomenda de x milhares de unidades de um determinado produto.

a) Sabendo que, para uma encomenda de 16 000 unidades, o preço por unidade é 3 euros e que, no caso de uma encomenda de 9000 unidades, o preço por unidade é 5 euros, prova que $a=-2$ e $b=11$.

b) Determina qual é o número mínimo de unidades de uma encomenda para que o preço por unidade seja inferior a 2 euros.

138. A procura do jogo Mat A, em função do preço p, em euros, a que é vendido é dada, aproximadamente, por $A(p)=\sqrt{180-3{,}6p}$, sendo $A(p)$ o número de clientes, em milhares, que vão comprar o jogo ao preço p.

A procura de um outro jogo, o Mat B, é dada aproximadamente, também em milhares, por $B(p)=15-0{,}3p$, sendo p o preço a que o jogo é vendido, em euros.

a) Quantos serão os clientes, se o jogo Mat A for vendido a 10 euros?

b) Se há 6000 clientes para o jogo Mat A, a que preço está a ser comercializado?

c) Há um preço de venda para os dois jogos que garante igual procura. Qual é esse preço?

d) Qual dos jogos permite maior receita (não havendo restrições de fabrico)? Recorre à calculadora para responder a esta questão.

139. Considera, num referencial o.n. xOy, a reta r de equação $y=2x$. Seja P o ponto de coordenadas $(3,-5)$. Determina as coordenadas dos pontos da reta r que distam 5 unidades do ponto P.

140. Seja f a função sobrejetiva, de domínio $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$, definida por $f(x) = \sqrt{5-2x} - 1$.

a) Considera o gráfico da função f num referencial o.n. do plano. Há um ponto no gráfico de f cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa. Determina as suas coordenadas.

b) Define a função inversa de f.

141. Seja g a função, de domínio $\left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[$, definida por $g(x) = \sqrt{5x+1}$. Considera o gráfico da função g num plano munido de um referencial o.n. xOy. Seja A o ponto do gráfico de g tal que $d(A, O) = 5$ e seja B o ponto do eixo das abcissas que tem abcissa igual à de A. Considera que um ponto C, de abcissa superior à abcissa de A, se desloca ao longo do gráfico de g.

Para cada posição do ponto C, seja x a sua abcissa e seja f a função que a cada valor de x faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$.

a) Define a função f (indica domínio de f e uma expressão de $f(x)$).

b) Determina a abcissa do ponto C para a qual o triângulo $[ABC]$ tem área 6.

142. Considera a função sobrejetiva f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{2x}$.

a) Caracteriza a função inversa de f e esboça o gráfico de f e de f^{-1} no mesmo referencial.

b) Seja $P(x, y)$ um ponto do gráfico de f.

b₁) Mostra que a distância de P ao ponto $A(3, 0)$ é dada por $\sqrt{x^2 - 4x + 9}$.

b₂) Determina as coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja distância a A é igual a $\sqrt{6}$.

b₃) Recorrendo à calculadora, determina as coordenadas do ponto do gráfico de f que está mais próximo de A.

143. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-2} - 3 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$

a) Determina os zeros de f.

b) Resolve a equação $f(x) = f(66)$.

c) Seja C o ponto de coordenadas $(0, 1)$, seja B o ponto em que o gráfico de f interseta o eixo das ordenadas e seja A o ponto do gráfico de f, com abcissa superior a 2, que está a igual distância de B e de C.

Mostra que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a $4 + 4\sqrt{10}$.

144. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ 4 - \sqrt{x-1} & \text{se } 1 < x \leqslant 17 \end{cases}$

a) Determina os zeros de g.

b) Determina os intervalos em que g é positiva.

c) Representa graficamente a função g.

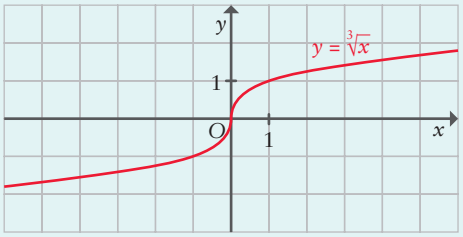
d) Determina os intervalos maximais de monotonia da função g e identifica os extremos da função.

Função raiz cúbica

Dá-se o nome de função raiz cúbica à função de domínio e conjunto de chegada $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Esta função é a função inversa da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3$.

O gráfico da função f encontra-se representado ao lado.



A partir deste gráfico, podemos obter o gráfco de qualquer função definida por uma expressão do tipo $y = a\sqrt[3]{x-h} + k$, com a, h e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

145. Determina o conjunto-solução de cada uma das condições seguintes.

a) $\sqrt[3]{3-x} = 2$

b) $2 - 3\sqrt[3]{1-2x} = 11$

c) $\sqrt[3]{x^2+3x-1} = 3$

d) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x^2-1} = 0$

e) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} = 0$

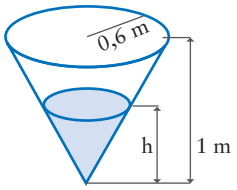
f) $\sqrt[3]{x^3+1} = x+1$

g) $\frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{8}} \geqslant 1$

h) $2 + \sqrt[3]{8-x^2} > 0$

i) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+3} > 0$

146. Um recipiente com forma cónica tem 1 metro de altura. O raio da base é 0,6 metros.



a) Determina a capacidade do recipiente. Apresenta o resultado em m^3.

b) Mostra que o volume, em m^3, de líquido contido no recipiente pode ser dado por $0{,}12\pi h^3$, sendo h a altura, em m, que o líquido atinge no recipiente.

c) Determina a altura que o líquido atinge no recipiente quando este contém 48 litros de líquido. Apresenta o resultado em cm, arredondado às unidades.

d) Define a função que dá a altura, em metros, que o líquido atinge no recipiente em função do seu volume, em m^3, e representa graficamente essa função.

147. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + 2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -2x^2 - x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

a) Determina a imagem de zero e os zeros de f.

b) Determina o(s) intervalo(s) em que a função é positiva.

Operações com funções

Sejam f e g funções reais de variável real.

Seja α um número real e seja r um número racional.

Definem-se as funções $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, αf e f^r do seguinte modo:

- $f+g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $fg : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ tal que $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
- $\frac{f}{g} : D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $\alpha f : D_f \to \mathbb{R}$ tal que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
- f^r é a função definida por $f^r(x) = [f(x)]^r$ e cujo domínio é o conjunto dos números reais para os quais $[f(x)]^r$ tem significado.

148. Considera as funções f e g, de domínio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, definidas por

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	0	1	0	-1

e por $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

a) Calcula:

a₁) $(f+g)(2)$ **a₂)** $(f \times g)(5)$ **a₃)** $(f \circ g)(3)$

b) Determina o domínio das funções:

b₁) $f - 2g$ **b₂)** $\frac{g}{f}$ **b₃)** $\frac{f}{g-1}$

c) Determina os zeros da função $f \times g$.

149. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2$ e a função h, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $h(x) = \sqrt{x-1} - 2$.

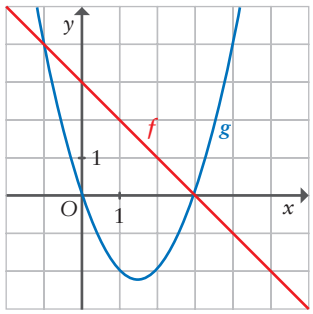
a) Calcula:

a₁) $(h-f)(1)$ **a₂)** $(f \times g)(-1)$ **a₃)** $(f \circ h)(3)$

b) Determina o domínio das funções:

b₁) $\frac{h}{f}$ **b₂)** $\frac{f}{h}$ **b₃)** $h \circ g$

150. No referencial da figura ao ladoestão representadas a função afim f e a função quadrática g.



a) Calcula:

a₁) $(f-g)(1)$ **a₂)** $\frac{f}{g}(2)$

b) Determina o domínio das funções:

b₁) $\frac{f}{g}$ **b₂)** $\sqrt{g}$ **b₃)** $\frac{1}{f^{\frac{1}{3}}}$

c) Mostra que o ponto de coordenadas $(4, -4)$ pertence ao gráfico da função $f \times g$.

d) Determina a ordenada do ponto do gráfico da função $f+g$ que tem abcissa 2.

e) Determina as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 3$.

f) Determina os zeros da função $f-g$.

g) Determina o conjunto-solução da condição $(f \times g)(x) \geqslant 0$.

h) Define analiticamente a função f e a função g .

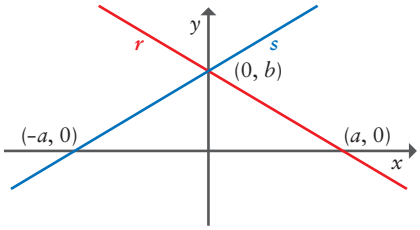
i) Caracteriza a função $f \times g$ e apresenta $(f \times g)(x)$ na forma de polinómio reduzido.

151. Qual pode ser o número de zeros:

a) da soma de duas funções afins? Explica a tua resposta.

b) da soma de uma função quadrática com uma função afim? Explica a tua resposta.

152. Considera as funções afins f e g representadas graficamente pelas retas r e s , respetivamente.



a) Determina, caso existam, os zeros das funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$.

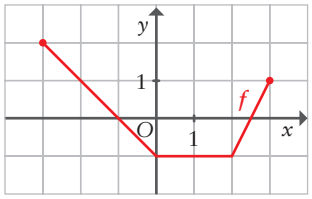
b) Admite que $b = 2$ e representa graficamente a função $f \times g$.

153. Considera as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{6-x}$ e $g(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, respetivamente.

a) Determina o domínio de cada uma das funções.

b) Seja $h = g - f$. Determina o domínio e os zeros da função h .

154. Considera a função f representada graficamente e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1 - x^2$.



a) Calcula:

a₁) $(f+g)(1)$ **a₂)** $(g \times f)(-2)$

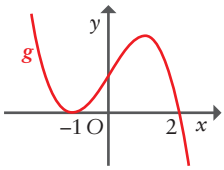
a₃) $\frac{g}{2f}(-3)$ **a₄)** $(g \circ f)(-1)$

b) Determina o domínio das funções:

b₁) $\frac{f}{g}$ **b₂)** $\sqrt{f}$ **b₃)** $\sqrt{g}$

c) Define analiticamente a função $f+g$.

155. Considera a função f definida por $f(x) = 2 - x$. Seja g uma função polinomial de grau 3, representada graficamente no referencial o.n. da figura ao lado.



a) Determina o domínio das funções $f+g$ e $\frac{g}{f}$.

b) Indica o número de zeros das funções $f-g$ e $\frac{f}{g}$.

c) Resolve a condição $f+g\,(x) \geqslant 0$.

Agora já podes realizar...

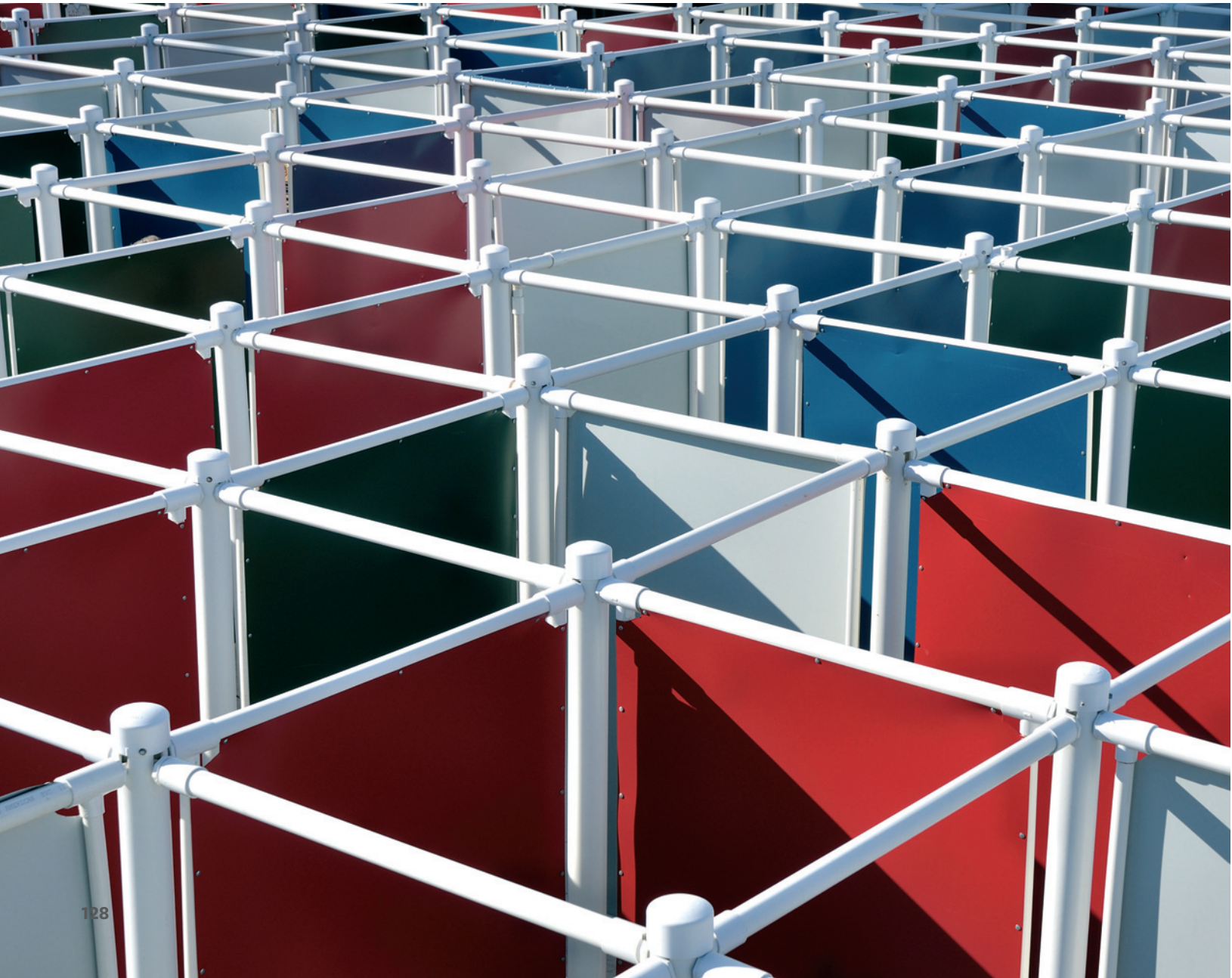
5 + 5 | Teste 5

AULA DIGITAL ALUNO

www.mat10.te.pt

Tema 5

Estatística



1. Características amostrais

O símbolo de somatório

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a soma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ pode ser representada por $\sum_{k=1}^{n} x_k$ $\left(\text{ou por } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{, ou por } \sum_{j=1}^{n} x_j \text{, ou por } \ldots\right)$.

A expressão $\sum_{k=1}^{n} x_k$ lê-se «somatório de 1 a n de x_k».

Dados números naturais m e n $(m \leqslant n)$, a soma $x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n$ pode ser representada por $\sum_{k=m}^{n} x_k$.

Exemplos:

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2$
- $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} = \sum_{i=5}^{7} \sqrt{i}$

Propriedades:

- $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$
- $\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k \quad (m < n)$

1. Representa as seguintes somas utilizando o símbolo de somatório.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

b) $\frac{13}{5} + \frac{13}{6} + \frac{13}{7}$

c) $\sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12} + \sqrt{13}$

2. Determina o valor de:

a) $\sum_{k=1}^{4} k^2$

b) $\sum_{j=1}^{3} (j \times 2^j)$

c) $\sum_{p=1}^{5} (2p - 1)^2$

d) $\sum_{i=1}^{6} [i(i+1)]$

e) $\sum_{n=1}^{6} (-2)^n$

3. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\sum_{j=1}^{10} (j^3 + 3^j) = \sum_{j=1}^{10} j^3 + \sum_{j=1}^{10} 3^j$

b) $\sum_{k=1}^{20} (1 + k^2) = 1 + \sum_{k=1}^{20} k^2$

c) $\sum_{n=1}^{30} (n+2)(n-2) = -120 + \sum_{n=1}^{30} n^2$

d) $\sum_{m=1}^{20} \frac{m^2 + 6m + 9}{m + 3} = 60 + \sum_{m=1}^{20} m$

4. Mostra que:

a) $\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{50}(10j) - 7\sum_{j=1}^{50} j\right) = \sum_{j=1}^{50} j$

b) $\sum_{k=1}^{60}(k-2)^2 + 4\sum_{k=1}^{60} k = 240 + \sum_{k=1}^{60} k^2$

c) $\sum_{p=1}^{70}\frac{(p+4)^2}{6} - \sum_{p=1}^{70}\frac{(p-4)^2}{6} = \frac{8}{3} + \sum_{p=1}^{70} p$

d) $\sum_{n=1}^{80}(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n = \sum_{n=1}^{80}(3^n - 2^n)$

5. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que:

a) $\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{3} = x + \sum_{k=1}^{18}\frac{k}{3}$

b) $\sum_{k=1}^{15}(k+x) = \sum_{k=6}^{16}(k+x)$

Variável estatística quantitativa

Variável estatística quantitativa em determinada população é uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.

Exemplo: na população dos habitantes de uma aldeia, uma variável estatística quantitativa é a altura (medida, por exemplo, em metros); esta variável é uma função que a cada habitante (unidade estatística) faz corresponder a sua altura.

Amostra de uma variável estatística

Dadas uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra de dimensão n dessa população, cujos elementos estão numerados de 1 a n, representa-se por x_i o valor da variável x no elemento da amostra com o número i.

Representa-se por $\underset{\sim}{x}$ a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a qual se designa por **amostra da variável estatística** x, ou, mais simplesmente, por **amostra**.

Os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são designados **valores da amostra**.

Dados agrupados

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão n. Suponhamos que a amostra tem m valores distintos: $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$. O conjunto destes valores representa-se por $\tilde{x}$ $(\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m\})$. Podemos considerar uma tabela de frequências absolutas.

Valores distintos da amostra	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	…	$\tilde{x}_m$
Frequências absolutas	n_1	n_2	…	n_m

Tem-se $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$ (a soma das frequências absolutas é igual à dimensão da amostra).

continua ▶

continuação

Média

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n de uma variável estatística quantitativa.

A **média** da amostra $\underset{\sim}{x}$ representa-se por $\bar{x}$. Tem-se $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Para dados agrupados tem-se $\bar{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j n_j}{n}$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores distintos da amostra $\underset{\sim}{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.

Propriedades:

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n.

- Sejam a e h números reais. Seja $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x} + h = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$. Então, $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
- Se na amostra $\underset{\sim}{x}$ alterarmos um valor x_i, a média também se altera.

Em virtude desta segunda propriedade, diz-se que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».

6. A mãe do Pedro não quer que ele esteja sentado diante do computador, em média, mais do que uma hora e meia por dia. Apresentam-se a seguir os tempos, em horas, que o Pedro esteve sentado diante do computador durante os últimos doze dias.

1,4 1,8 1,58 1,56 1,6 1,5 1,85 1,65 1,48 1,68 1,8 1,3

Calcula a média destes tempos e verifica se o Pedro cumpriu ou não as recomendações da mãe.

7. Num certo jogo de futebol foram registadas as distâncias, em quilómetros, percorridas pelos catorze jogadores de campo que não foram substituídos (jogador de campo é um jogador que não é guarda-redes). Apresentam-se a seguir essas distâncias.

9,2 10,2 10,6 9,1 10,8 9,9 11,1 9,3 11,2 10,5 9,5 10,7 9,8 10,9

a) Qual é a média das distâncias percorridas por estes catorze jogadores durante esse jogo?

b) Se nenhum jogador tivesse sido substituído, qual seria a totalidade de quilómetros que os vinte jogadores de campo teriam percorrido, admitindo que a média não se alterava?

8. Os catorze jogadores de uma equipa de basquetebol foram divididos em dois grupos, ficando oito num dos grupos e os restantes seis no outro grupo. Apresentam-se a seguir as alturas, em metros, dos oito jogadores do primeiro grupo.

1,99 1,82 1,86 1,90 1,84 1,86 1,91 1,94

a) Qual é a média das alturas destes oito basquetebolistas?

b) Sabe-se que a média das alturas dos seis jogadores do segundo grupo é 1,82 metros. Qual é a média das alturas dos catorze jogadores desta equipa de basquetebol?

9. Nas últimas férias, a Filipa leu um romance policial. Ela leu entre oito e treze páginas por dia. Na tabela seguinte é indicado o número de dias que ela leu oito páginas, o número de dias que ela leu nove páginas, e assim sucessivamente.

Número de páginas lidas	8	9	10	11	12	13
Número de dias	5	4	9	5	3	1

a) Quantos dias demorou a Filipa a ler o romance?

b) Quantas páginas tem o livro?

c) Em média, quantas páginas leu a Filipa por dia?

10. Uma equipa de estafeta 4 × 100 realizou um treino. Registaram-se os tempos dos quatro atletas. Sabe-se que o 1.º atleta percorreu os primeiros 100 metros em 10,3 segundos, o 2.º atleta demorou 9,6 segundos e o 4.º atleta gastou 9,4 segundos a cumprir os últimos 100 metros.

Determina quanto tempo levou o 3.º atleta a percorrer os seus 100 metros, sabendo que a média dos quatro tempos é 9,7 segundos.

11. Em duas cidades, A e B, foram registadas as temperaturas máximas, medidas em graus Celsius, que foram observadas em cada dia do mês de abril de um certo ano. Na cidade A, a média dessas temperaturas máximas foi de 15 °C.

a) Na cidade B, as temperaturas máximas diárias foram iguais às da cidade A, à exceção de seis dias, em que foram de mais 1 °C. Qual foi, nesse mês, a média das temperaturas máximas diárias na cidade B?

b) Designando por C uma dada temperatura em graus Celsius e por F a correspondente temperatura em graus Fahrenheit, tem-se $F = 1{,}8C + 32$. Qual seria, nesse mesmo mês de abril, a média das temperaturas máximas diárias, na cidade A, se elas tivessem sido medidas em graus Fahrenheit?

Desvios em relação à média

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão n e de média $\bar{x}$. Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Chama-se **desvio de x_i relativamente à média** ao valor $d_i = x_i - \bar{x}$.

Propriedade: a soma dos desvios relativamente à média é nula: $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$.

Soma dos quadrados dos desvios em relação à média

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão n e de média $\bar{x}$.

A **soma dos quadrados dos desvios em relação à média** representa-se por SS_x (*sum of squares*). Portanto, $SS_x = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$.

continua ▶

continuação

Propriedades:

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n e de média $\overline{x}$.

- $SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$
- $SS_x = 0$ sse $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
- Seja h um número real. Seja $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h = (x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h)$. Então, $SS_y = SS_x$.
- Seja a um número real. Seja $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Então, $SS_y = a^2 SS_x$.
- Para dados agrupados tem-se $SS_x = \sum_{j=1}^{m} n_j (\tilde{x}_j - \overline{x})^2$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores distintos da amostra $\underset{\sim}{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.

Variância e desvio padrão

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n $(n > 1)$:

- $\dfrac{SS_x}{n-1}$ é a **variância** da amostra $\underset{\sim}{x}$ e representa-se por s_x^2;
- $\sqrt{\dfrac{SS_x}{n-1}}$ é o **desvio padrão** da amostra $\underset{\sim}{x}$ e representa-se por s_x.

Propriedades:

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão $n > 1$.

- $s_x = 0$ sse $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
- Seja h um número real. Seja $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h = (x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h)$. Então, $s_y = s_x$.
- Seja a um número real. Seja $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Então, $s_y = |a| s_x$.

12. Numa prova de salto em comprimento passavam à final os doze atletas que tivessem obtido as doze melhores marcas. Apresentam-se a seguir as marcas alcançadas, nessa eliminatória, pelos doze atletas que passaram à final (valores em metros).

8,02 7,92 8,11 8,03 7,95 8,06 7,97 8,08 8,11 8,03 7,99 8,09

a) Calcula a média dessas doze marcas.

b) Calcula o desvio de cada marca em relação à média.

13. Mediu-se o consumo de gasolina, em litros, de dez automóveis, num percurso de 100 km. Obteve-se assim uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$, de dimensão 10.
Relativamente a essa amostra, apresentam-se a seguir $d_1, d_2, \dots, d_9$ (desvios dos nove primeiros valores da amostra em relação à média $\overline{x}$):

–0,2 –0,2 0,2 0,3 0,1 –0,1 –0,4 0,1 –0,1

a) Determina d_{10} (desvio não apresentado na lista anterior).

b) Sabendo que $x_{10} = 6{,}2$, determina $\overline{x}$.

c) Quantos litros de gasolina foram consumidos pelos dez automóveis?

14. Foram registados os salários, em euros, de um certo número de trabalhadores de uma empresa, tendo-se assim obtido uma amostra $\underset{\sim}{x}$. Sabe-se que $SS_x = 20\ 000\ 000$.

a) Num certo dia, a empresa decidiu aumentar os salários desses trabalhadores em 100 euros. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra dos novos salários. Qual é o valor de SS_y?

b) Passado um ano, a empresa decidiu aumentar os salários desses mesmos trabalhadores em 15%. Seja $\underset{\sim}{z}$ a amostra destes últimos salários. Qual é o valor de SS_z?

15. Um canteiro de um jardim foi dividido em oito talhões, onde se plantaram sementes de uma espécie de flores, tendo sido colocadas vinte sementes em cada talhão.

Contou-se o número de sementes que germinaram em cada um dos oito talhões, tendo-se assim obtido a seguinte amostra: $\underset{\sim}{x} = (13, 16, 17, 14, 13, 14, 16, 17)$.

a) Calcula $\overline{x}$.

b) Determina s_x (apresenta o resultado arredondado às centésimas).

16. Considera a seguinte tabela de frequências absolutas, relativa a uma amostra $\underset{\sim}{x}$.

$\tilde{x}_i$	10	11	12	13	14	15
n_i	15	28	33	39	36	49

a) Determina a dimensão da amostra $\underset{\sim}{x}$.

b) Determina s_x (apresenta o resultado arredondado às décimas).

c) Seja $\underset{\sim}{y} = -\frac{1}{2}\underset{\sim}{x} + 5$. Determina s_y.

17. Sejam $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ duas amostras com a mesma dimensão n.
Sabendo que $\overline{x}^2 \neq \overline{y}^2$ e que $SS_x = SS_y$, mostra que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2)}{\overline{x}^2 - \overline{y}^2} = n$$

Teorema de Chebycheff

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão $n > 1$, de média $\overline{x}$ e desvio padrão s_x.

Seja k um número real positivo e seja I o intervalo $[\overline{x} - ks_x, \overline{x} + ks_x]$.

Então, a proporção de elementos da amostra que não pertencem a I é inferior a $\frac{1}{k^2}$.

18. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão $n > 1$, de média $\overline{x}$ e desvio padrão s_x.
De acordo com o teorema de Chebycheff, a proporção de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo:

a) $[\overline{x} - 2s_x, \overline{x} + 2s_x]$ é inferior a _____.

b) $[\overline{x} - 3s_x, \overline{x} + 3s_x]$ é inferior a _____.

c) $[\overline{x} - 4s_x, \overline{x} + 4s_x]$ é inferior a _____.

19. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão $n > 1$, de média $\overline{x}$ e desvio padrão s_x.
De acordo com o teorema de Chebycheff, a percentagem de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo:

a) $[\overline{x} - 2s_x, \overline{x} + 2s_x]$ é inferior a _____.

b) $[\overline{x} - 5s_x, \overline{x} + 5s_x]$ é inferior a _____.

20. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{144})$ uma amostra de dimensão 144, de média 50 e desvio padrão 2.
De acordo com o teorema de Chebycheff, o número de elementos da amostra que não pertencem ao intervalo:

a) $[46, 54]$ é inferior a _____.

b) $[44, 56]$ é inferior a _____.

c) $[42, 58]$ é inferior a _____.

d) $[40, 50]$ é inferior a _____.

e) $[45, 55]$ é inferior a _____.

21. Num certo jogo de futebol foram registadas as distâncias percorridas pelos dezasseis jogadores de campo que não foram substituídos. A média dessas distâncias foi de 10 km e o desvio padrão foi de 0,5 km.

a) Determina o número máximo de jogadores que poderão ter percorrido menos de 9 km ou mais de 11 km.

b) Determina o número mínimo de jogadores que percorreram entre 8,5 km e 11,5 km.

22. Numa escola realizou-se um teste de Matemática, que foi aplicado a 120 alunos do 10.º ano.
A média foi de 11,4 valores e o desvio padrão foi 1,3 valores.
Prova que, no máximo, houve um aluno com classificação inferior a 1.

Amostra ordenada

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n de uma variável estatística quantitativa.

Chama-se **amostra $\underset{\sim}{x}$ ordenada** à sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \dots \leqslant x_{(n)}$ com os mesmos valores que a amostra $\underset{\sim}{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\underset{\sim}{x}$.

Têm-se as seguintes designações:

- $x_{(1)}$ é designado por elemento de ordem 1 da amostra ordenada;
- $x_{(2)}$ é designado por elemento de ordem 2 da amostra ordenada;

  ...
- $x_{(n)}$ é designado por elemento de ordem n da amostra ordenada.

Percentil de ordem k

Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n de uma variável estatística quantitativa. Seja k um número natural menor ou igual a 100.

continua ▶

continuação

O **percentil de ordem** k representa-se por P_k e define-se, a partir da amostra ordenada, do seguinte modo:

- se $k = 100$, o percentil de ordem k é o valor máximo da amostra, ou seja, $P_{100} = x_{(n)}$;
- se $k \neq 100$, o percentil de ordem k é:
  - — a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$, se $\frac{kn}{100}$ for um número natural;
  - — o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$, se $\frac{kn}{100}$ não for um número natural.

Nota: dado um número real x, $[x]$ designa o maior número inteiro inferior ou igual a x.

Propriedade: dada uma amostra, existem pelo menos $k\%$ elementos inferiores ou iguais a P_k, pelo que existem no máximo $(100 - k)\%$ elementos superiores a P_k.

Percentis de ordem 25, 50 e 75

Dada uma amostra, o **percentil de ordem 50** coincide com a mediana.

É usual definir o **primeiro** e o **terceiro quartil** de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e com P_{75}.

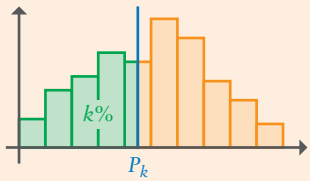
23. Considera a seguinte amostra.

$\underset{\sim}{x}$ = (13, 48, 28, 4, 17, 31, 42, 9, 23, 37, 15, 20, 45, 50, 11, 2, 27, 34, 43, 16, 30, 49, 7, 26, 19, 44, 8, 22, 1, 10)

Calcula: **a)** P_{30} **b)** P_{45} **c)** O terceiro quartil.

Percentil de ordem k de um conjunto de dados quantitativos organizados em classes

O **percentil de ordem** k é o valor P_k tal que a área da região do histograma que está à esquerda da reta de equação $x = P_k$ é $k\%$ da área total do histograma.



24. Num certo fim de semana, nos jogos de futebol da primeira e da segunda ligas, houve um total de 300 jogadores de campo que não foram substituídos. Foram registadas as distâncias, em km, percorridas por estes jogadores. Os dados estão resumidos na tabela seguinte.

Distância percorrida	[8; 8,5[	[8,5; 9[	[9; 9,5[	[9,5; 10[	[10; 10,5[	[10,5; 11[	[11; 11,5[	[11,5; 12]
Número de jogadores	3	15	46	81	84	50	17	4

Determina o primeiro quartil e P_{95}. Apresenta os resultados arredondados às milésimas e interpreta os valores obtidos.

Agora já podes realizar...

5 + 5 | Teste 6A

5 + 5 | Teste 6B

AULA DIGITAL ALUNO

www.mat10.te.pt

Tema 1 Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

1. Proposições

Págs. 4 a 12

1. «O rio Douro nasce na serra da Estrela.»
«O menor número primo é par.»

2. **a)** F **b)** F **c)** V **d)** F **e)** F **f)** F
g) V **h)** F **i)** V **j)** V

3. Os valores lógicos de p, q, r e s são respetivamente V, F, F e V.
a) F **b)** V **c)** V

4. V

5. «D. Dinis não foi o primeiro rei de Portugal.»

6. Todas, exceto «O telemóvel da Inês não é de marca diferente do telemóvel da Catarina.»

7. **a)** V **b)** F

8. **a)** V
b) «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 90º.»

9. Os valores lógicos de p e de q são diferentes.
a) V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F

10. **a)** «A Filipa é filha da Joana.» e «A Filipa é filha do Marco.»
b) «18 é múltiplo de 3.» e «18 é múltiplo de 6.»
c) «$1 < 2$» e «$2 < 3$»

11. **a)** «A Teresa tem dois irmãos.» e «A Teresa tem três irmãos.»
b) «$\frac{9}{4} < 2{,}5$» e «$\frac{9}{4} = 2{,}5$»
c) «A minha filha Margarida vai comigo ao cinema esta tarde.» e «O meu filho Pedro vai comigo ao cinema esta tarde.»

12. **a)** «Não vou comer uma laranja.»
b) «Vou comer uma laranja e uma maçã.»
c) «Vou comer uma laranja, mas não vou comer uma maçã.»
d) «Não vou comer uma laranja, nem uma maçã.»
e) «Vou comer uma laranja ou uma maçã.»
f) «Vou comer uma laranja ou uma maçã, mas não as duas frutas simultaneamente.»

13. **a$_1$)** $\sim p$ **a$_2$)** $q \wedge r$ **a$_3$)** $q \vee r$
a$_4$) $p \wedge r$ **a$_5$)** $\sim p \wedge q$ **a$_6$)** $r \wedge \sim q$
a$_7$) $\sim q \wedge \sim r$

b$_1$) «2 ou 3 pertence ao conjunto A.»
b$_2$) «2 não pertence ao conjunto A e 3 não pertence ao conjunto B.»

14. O valor lógico de $\sim a$ é V e o de $\sim b$ é V; assim, o valor lógico de a é F e o de b é F.
a) F **b)** V

15. **a)** V **b)** V **c)** F

16. **a$_1$)** $\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$ (1)
$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$ (2)
$\Leftrightarrow p \wedge v \Leftrightarrow$ (3)
$\Leftrightarrow p$

(1) Dupla negação
(2) Princípio do terceiro excluído
(3) Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição

a$_2$) $\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow$ (1)
$\Leftrightarrow \sim p \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow$ (2)
$\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$ (3)
$\Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$ (4)
$\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow$ (5)
$\Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

(1) 1.as leis de De Morgan
(2) Distributiva da conjunção relativamente à disjunção
(3) Princípio da não contradição
(4) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(5) 1.as leis de De Morgan

a$_3$) $[(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$ (1)
$\Leftrightarrow (v \wedge q) \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$ (2)
$\Leftrightarrow q \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow$ (3)
$\Leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow$ (4)
$\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow$ (5)
$\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee f \Leftrightarrow$ (6)
$\Leftrightarrow q \wedge p \Leftrightarrow$ (7)
$\Leftrightarrow p \wedge q$

(1) Princípio do terceiro excluído
(2) Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição
(3) 1.as leis de De Morgan
(4) Distributiva da conjunção relativamente à disjunção
(5) Princípio da não contradição
(6) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(7) Comutatividade da conjunção

a$_4$) $p \vee [q \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow$ (1)
$\Leftrightarrow p \vee [(f \vee q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow$ (2)
$\Leftrightarrow p \vee [(f \wedge p) \vee q] \Leftrightarrow$ (3)
$\Leftrightarrow p \vee (f \vee q) \Leftrightarrow$ (4)
$\Leftrightarrow p \vee q$

(1) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(2) Distributiva da disjunção relativamente à conjunção
(3) Conjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(4) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

b$_1$)

p	q	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim q$	$q \vee \sim q$	$\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F

b$_2$)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	V

b$_3$)

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$(p \vee \sim p) \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$p \wedge q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F

$[(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim(\sim p \wedge q)]$
V
F
F
F

b$_4$)

p	q	$p \vee q$	$q \wedge (p \vee q)$	$p \vee [q \wedge (p \vee q)]$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	F

17. **a)** F **b)** V **c)** q

18. **a)** $p \wedge [q \vee \sim(p \vee q)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p \wedge q$; V
Então, as proposições p e q são ambas verdadeiras, pelo que o valor lógico da proposição é verdade.

19. $(p \vee q) \wedge \sim[(q \wedge r) \vee \sim r] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \wedge r)$
Conclui-se que apenas a proposição q é falsa e que saiu 4 no lançamento do dado.

20. **a)** p: «O Joaquim come a sopa.»
q: «A mãe do Joaquim dá-lhe um doce.»
$p \Rightarrow q$
b) p: «Não falto aos treinos.»
q: «Sou chamado para a equipa da escola.»
$p \Rightarrow q$
c) p: «Vês Braga por um canudo.»
q: «Vais ao Santuário do Bom Jesus do Monte.»
$p \Rightarrow q$

21. **a)** V **b)** F **c)** V

22. **a)** p é falsa, q é falsa e r é verdadeira.
b) p é verdadeira, q é falsa e r é falsa.

23. **a)** V **b)** V **c)** V **d)** V

24. Como a implicação é verdadeira, temos três casos possíveis:
- $p \vee q$ é verdadeira e $p \wedge q$ é verdadeira; e, daí, p e q são ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é verdadeira; temos novamente p e q ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.
- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é falsa; como $p \vee q$ é falsa, p e q são ambas falsas, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

25. **a)** V **b)** V

26. $\sim(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge r \wedge \sim q$

27. **a₁)** «Se esta tarde estudar Matemática, então à noite vou ver televisão e jogar no computador.»

a₂) «Se esta tarde estudar Matemática e esta noite não jogar no computador, então esta noite vou ver televisão.»

a₃) «Esta noite vou ver televisão se e só se não jogar no computador.»

b₁) $p \Rightarrow q \vee r$

b₂) $\sim p \Rightarrow \sim q \wedge \sim r$

c₁) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
«Esta tarde vou estudar Matemática, mas à noite não vou ver televisão.»

c₂) $\sim(q \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow q \wedge r$
«Esta noite vou ver televisão e vou jogar no computador.»

28. $(p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim r)$ é verdadeira
$\Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ logo $q \Rightarrow \sim r$ é verdadeira

29. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge$
$\wedge (\sim q \Rightarrow r) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge$
$\wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r)$
$\Rightarrow (r \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow r)$
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (r \Leftrightarrow \sim p)$ logo $r \Leftrightarrow \sim p$ é verdadeira

(1) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p)$
e $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$

30. A., D. e E.

2. Condições e conjuntos

Págs. 13 a 26

31. A., B. e D.

32. **a)** V **b)** F

33. **a)** Para $x = 2$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

b) Para $x = 0$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 1$ resulta uma proposição falsa.

c) Para $x = 3$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

d) Para $x = 2$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

e) Para $x = 0$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = -1$ resulta uma proposição falsa.

f) Para $x = -4$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

34. **a)** 3 **b)** 1 e 2 **c)** 2 e 3 **d)** 1, 2 e 3

35. **a)** É. **b)** Não é. **c)** Não é. **d)** Não é.
e) É. **f)** Não é.

36. V

37. $x \leqslant -1$

38. $p(n) \wedge q(n)$

39. **a)** $-3 \leqslant x \wedge x < 0$
b) $-3 > x \vee x \geqslant 0$

40. **a)** $x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0$
b) $x - 3 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0$

41. $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$-3x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3}$

a) 1, por exemplo. **b)** 0, por exemplo.
c) 0, por exemplo. **d)** -2
e) 0, por exemplo. **f)** 1, por exemplo.
g) 0, por exemplo. **h)** -1, por exemplo.

42. **a)** $x > -5 \wedge -x > -5$
b) $x = 10 \vee x + 1 = 10$
c) $x \leqslant 0 \wedge x^3 \leqslant 0$

43. **a)** $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$; V
b) $x|x| < 0 \Leftrightarrow x < 0$; V
c) $x < 3 \Rightarrow x \leqslant 3$; V
d) $x \neq 6 \Leftrightarrow x^2 \neq 36$; F

44. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V

45. **a)** $\exists k \in \mathbb{Z} : -5 < k < -3$; V
b) $\exists k \in \mathbb{Z} : k = k^3$; V
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x < \dfrac{1}{x}$; V
d) $\exists n \in \mathbb{N}$: a soma de n e $n + 1$ é um número par ; F

46. $p(n)$ é impossível em $\mathbb{N}$.
$q(n)$ é impossível em $\mathbb{N}$.
$r(n)$ é possível em $\mathbb{N}$.

47. $p(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.
$q(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.
$r(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.
$s(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

48. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

49. **a)** A condição é universal em $\mathbb{N}$.
b) A condição não é universal em $\mathbb{N}$.
c) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
d) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
e) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
f) A condição não é universal em $\mathbb{N}$.

50. **a)** $\forall x \in \mathbb{R}, x \times (-x) < 0$; F
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x$; F
c) $\forall n \in \mathbb{N}$, a soma de n, $n + 1$ e $n + 2$ é múltiplo de 3 ; V
d) $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\dfrac{\text{m.d.c.}\,(n, n+1) + \text{m.m.c.}\,(n, n+1)}{2} \notin \mathbb{N}$;
V

51. **a)** A condição é impossível em $\mathbb{R}$.
b) A condição é universal em $\mathbb{R}$.
c) A condição é possível não universal em $\mathbb{R}$.
d) A condição é possível não universal em $\mathbb{N}$.
e) A condição é universal em $\mathbb{N}$.

52. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F

53. Por exemplo:
a) $[2, +\infty[$
b) $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$
c) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

54. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** V

55. $a = 3$; $b = 3 \vee b = \dfrac{1}{3}$

56. A proposição afirma que uma condição universal num domínio é possível nesse domínio, o que é verdade.

57. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0$

58. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geqslant 5$

59. **a)** $\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 > 2x$; V
b) $\forall x \in \mathbb{Z}, 3x + 7 \neq 3$; V
c) $\exists n \in \mathbb{N} : 6n + 3$ é par ; F
d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$; F

60. **a)** «Há seres humanos que não sabem nadar.»; V
b) «Nenhum número natural é múltiplo de 3.» ou «Todos os números naturais não são múltiplos de 3.»; F
c) «Os números inteiros são todos menores ou iguais a 0 ou maiores ou iguais a 1.»; V
d) «Há números reais que são irracionais.»; V

61. **a)** $x = 0$, pois $|0| = 0$ e não é um número positivo.
b) $x = -1$, pois -3 não é menor ou igual a -5.
c) $n = 15$, $15 \in]1, 19[$, 15 é ímpar, 15 não é quadrado perfeito, mas 15 não é primo.
d) $x = -1$, $(-1 + 1)^4 > (-1)^4 \Leftrightarrow 0 > 1$, que é uma proposição falsa.

62. **a)** $\{-1, 0, 1\}$
b) $\{-4, -3, 0, 4\}$
c) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

63. **a)** $\{2, 3, 4\}$
b) $\{2, 3, 5\}$
c) $\{2, 3, 4, 6\}$
d) $\{2, 3, 4\}$

64. **a)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} : n$ é múltiplo de $7 \wedge n < 30\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : n < 17 \wedge n$ não é primo$\}$

65. $\{-3, 0, 3, 6\}$

66. $[-10, 12[$

67. **a)** $\{2\}$ **b)** $\{5, 9, 13\}$

c) $\{2, 5, 8\}$ **d)** $\varnothing$

e) $\{2, 5, 7\}$ **f)** $\varnothing$

g) $[3, 5]$ **h)** $]2, 5]$

i) $\{6\}$ **j)** $\varnothing$

k) $\mathbb{N}$ **l)** $\varnothing$

68. Seja $x \in A \cap C$, então $x \in A \wedge x \in C$.
$x \in A \Rightarrow x \in B$, pois $A \subset B$.
$x \in C \Rightarrow x \in D$, pois $C \subset D$.
Como $x \in B \wedge x \in D$, $x \in B \cap D$, logo $A \cap C \subset B \cap D$.

69. **a)** $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 16\}$

b) $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $[2, 9]$ **d)** $]1, 8]$

e) $[-2, 7]$ **f)** $]5, 15]$

g) $\mathbb{Z}$ **h)** $\mathbb{Z}$

70. Por exemplo: $C = \{1, 13, 21\}$.

71. $A \cup B = B$ é necessariamente falsa.

$B \cap C = \varnothing$ é necessariamente verdadeira.

72. **a)** $\{2, 6, 7\}$ **b)** $\varnothing$

c) $\{2, 3, 5, 7\}$ **d)** $\{1, 6, 11, 16\}$

e) $\varnothing$ **f)** $\{1, 4, 5, 9\}$

g) $[4, 6[$ **h)** $]0, 5[$

i) $[18, +\infty[$ **j)** $]-\infty, 4[$

73. $\{1, 4\}$

74. **a)** $]10, 12]$

b) $[2, 5]$

c) $\{2, 12\}$

75. **a)** $]3, 8[$ **b)** $]3, 12]$

c) $[-1, 8[$ **d)** $[-3, +\infty[$

e) $[-3, 12]$ **f)** $]-\infty, -3[\cup [8, +\infty[$

g) $]-\infty, -3]$ **h)** $[8, +\infty[$

i) $]12, +\infty[$

76. **a$_1$)** $]4, +\infty[$ **a$_2$)** $\mathbb{R}$

a$_3$) $\varnothing$ **a$_4$)** $\varnothing$

a$_5$) $]4, +\infty[$ **a$_6$)** $]4, +\infty[$

a$_7$) $\mathbb{R}$ **a$_8$)** $]-\infty, 4]$

a$_9$) $]4, +\infty[$

b$_1$) Possível não universal.

b$_2$) Universal.

b$_3$) Impossível.

b$_4$) Impossível.

b$_5$) Possível não universal.

b$_6$) Universal.

b$_7$) Universal.

77. **a)** $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} = \{-2, -1, 1, 3\}$

b) $\{-2, -1, 1, 3\} \cup \varnothing = \{-2, -1, 1, 3\}$

c) $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} = \{-2, -1\}$

78. **a)** $\sim p(a) \Rightarrow q(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(a) \vee q(a)$ é verdadeira; como a verifica $p(x) \vee q(x)$, conclui-se que $a \in P \cup Q$.

b) $\sim[\sim q(b) \Rightarrow p(b)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim q(b) \wedge \sim p(b)$ é verdadeira; então $b \notin P \cap b \notin Q$, logo $b \notin P \cap Q$, isto é, $b \in \overline{P \cap Q} \Leftrightarrow b \in \overline{P} \cup \overline{Q}$.

79. Queremos provar que:

t interseta $r \Rightarrow t$ interseta s

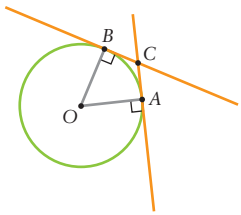
utilizando o método de demonstração por contrarrecíproco.
Para isso, basta provar que:

t é paralela a $s \Rightarrow t$ é paralela a r

Assim, como t é paralela a s e s é paralela a r (por hipótese), conclui-se (transitividade) que t é paralela a r.

80. Vamos demonstrar a equivalência por dupla implicação:

$[OACB]$ é um losango $\Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ \wedge$
$\wedge\ A\hat{O}B = 90^\circ \Rightarrow [OACB]$ é um losango



Provemos a 1.ª implicação:
$O\hat{B}C = O\hat{A}C = 90^\circ$ (as retas tangentes à circunferência são perpendiculares aos raios nos pontos de tangência). Como $[OACB]$ é losango, $A\hat{O}B = A\hat{C}B$ e:

$O\hat{B}C + O\hat{A}C + A\hat{O}B + A\hat{C}B = 360^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + 2A\hat{O}B = 360^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ$

Provemos a 2.ª implicação:
Como $A\hat{O}B = 90^\circ$:

$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + A\hat{C}B = 360^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A\hat{C}B = 90^\circ$

Assim, $[OACB]$ tem os quatro ângulos iguais, isto é, é um retângulo. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios de uma circunferência), conclui-se que $[OACB]$ é um quadrado e, consequentemente, é um losango.

81. Vamos supor que a soma de um número racional com um número irracional é um numero racional.

a e b designam números racionais

x designa um número irracional

$a + x = b$ (1)

a, por ser racional, pode ser escrito na forma de um quociente entre dois números inteiros; assim $a = \frac{n}{m}$, onde n e m designam números inteiros, com $m \neq 0$.

O mesmo acontece com b; $b = \frac{p}{q}$, onde p e q designam números inteiros, com $q \neq 0$.

Substituindo a e b em (1) resulta:

$$\frac{n}{m} + x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{q} - \frac{n}{m} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{mp - nq}{mq}$$

Os números mp, nq e mq são inteiros, pois o produto de dois números inteiros é um número inteiro.
Sendo assim, x é um número racional, pois é o quociente de dois números inteiros.
Esta contradição resulta do facto de termos suposto que a soma de um número racional com um número irracional era um número racional.
Logo, a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Tema 2 Álgebra

1. Radicais e potências de expoente racional

Págs. 28 a 34

1. **a)** V **b)** F **c)** F

2. **a)** V **b)** F

3. **a)** Verdade, pois $2n - 1$ designa um número ímpar, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$.

b) Falso; por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^2$ é maior do que $(-2)^2$.

c) Falso; por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^3$ é menor do que $(-2)^3$.

d) Verdade, pois $2n$ designa um número par, -3 e -2 são números negativos, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número par, se tem $a < b < 0 \Rightarrow a^k > b^k$.

e) Verdade, pois $x \in]-\infty, -2[\Leftrightarrow x < -2$ e 13 é um número ímpar, e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$.

f) Verdade, pois, dado que x é menor do que -2, tem-se $x < -2 < 0$ e, como 8 é um número par, sabemos que $x^8 > (-2)^8$, condição esta que é equivalente a $x^8 > 2^8$.

g) Falso. Seja, por exemplo, $x = -3$; tem-se $-3 \in]-\infty, -2[$, $(-3+1)^5 = -32$ e $(-3)^5 = -243$ e, portanto, $(x+1)^5 > (-3)^5$.

4. Seja $a \in]0, 1[$; então, dado que $0 < a < 1$, tem-se $0 < a^n < 1^n$ e, portanto, $a^n < 1$.

5. **a)** 2 **b)** 8 **c)** -2

6. $\frac{1}{2}$

7. As soluções são:

a) $\sqrt[5]{10}$ **b)** $\sqrt[3]{-2}$ **c)** $\sqrt[9]{3}$ **d)** $\sqrt[4]{8}$

8. 2

9. **a)** 4 **b)** 12 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 120 **f)** 15

10. **a)** 4 **b)** 10 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 8 **f)** 3

11. **a)** 4 **b)** 5 **c)** 21

12. **a)** $\sqrt[3]{40}$ **b)** $\sqrt[3]{27a}$ **c)** $\sqrt{50}$ **d)** $\sqrt{3a^2}$ **e)** $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$

13. **a)** $7\sqrt[3]{3}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $5\sqrt{6}$ **e)** $2\sqrt{3}$ **f)** $2\sqrt{2}$ **g)** $2\sqrt[5]{4}$ **h)** $3a^2b^3\sqrt{2a^2b}$ **i)** $3|a|\sqrt{3}\sqrt{3a^2}$ **j)** $2|x|\sqrt[4]{2}$

14. **a)** $5\sqrt{3}$ **b)** $5\sqrt[3]{x}$ **c)** $20\sqrt{2}$ **d)** $6\sqrt{3}$ **e)** $a\sqrt[3]{a}$ **f)** $4ab\sqrt{2ab}$

15. **a)** $3\sqrt[24]{5}$ **b)** $\sqrt[12]{12}$ **c)** $\sqrt[6]{20}$

16. **a)** $\sqrt[12]{3^4}$ **b)** $\sqrt[12]{2^6}$ **c)** $\sqrt[12]{5^3}$ **d)** $\sqrt[12]{10^2}$ **e)** $\sqrt[12]{a^8}$

17. **a)** $\sqrt[3]{3}$ **b)** $\sqrt[3]{5}$ **c)** $\sqrt[3]{3^2}$ **d)** $\sqrt[3]{a^2b}$ **e)** $\sqrt[3]{2}$

18. **a)** $\sqrt[6]{5^2}$ e $\sqrt[6]{2}$ **b)** $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[4]{5^2}$ **c)** $\sqrt[6]{4^2}$ e $\sqrt[6]{3^3}$ **d)** $\sqrt[12]{3^2}$ e $\sqrt[12]{2^3}$

19. **a)** $\sqrt[3]{3}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt[7]{16}$ **d)** $2+7\sqrt{6}$ **e)** 2 **f)** $5-2\sqrt{6}$ **g)** $\sqrt{3}$ **h)** 189

20. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(\sqrt{c})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{c}{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt[3]{c} = b$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt[3]{c})^3} = \frac{\sqrt[3]{c^3}}{c} = \sqrt{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt{c} = a$

21. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt[6]{108}}{3}$ **d)** $3\sqrt[3]{25}$ **e)** $\frac{\sqrt{10}-2}{6}$ **f)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **g)** $2+\sqrt{3}$ **h)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ **i)** $\frac{3\sqrt{11}+3\sqrt{3}}{2}$ **j)** $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{3}$

22. **a)** $3+2\sqrt{3}$ **b)** $3+4\sqrt{2}+\sqrt{6}$

23. **a)** $\sqrt[7]{3^4}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt[9]{2^5}$ **d)** $\sqrt[3]{4^{-1}}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

24. **a)** $\sqrt{25}=5$ **b)** $\sqrt[3]{8}=2$ **c)** $\sqrt{4^3}=8$ **d)** $\sqrt[3]{27}=3$ **e)** $\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

25. **a)** $2^{\frac{1}{2}}$ **b)** $2^{\frac{2}{3}}$ **c)** $2^{\frac{3}{5}}$ **d)** $2^{-\frac{5}{4}}$ **e)** $2^{-\frac{14}{3}}$

26. **a)** $\sqrt{10}$ **b)** $6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{36}$ **c)** $6^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{6^4}$ **d)** $\sqrt[8]{27}$ **e)** $\sqrt[8]{5^3}$

27. $a^{\frac{1}{4}}$ **28.** $\sqrt[9]{a^5}$

29. $8+4\sqrt{2}$ **30.** $4\sqrt{6}\,\pi$

31. **a)** $3\sqrt{3}$

b) $\begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = 3\sqrt{3} \\ v_2 - v_1 = 13\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}\,v_1 \\ v_2 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ 3\sqrt{3}v_1 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi}{3\sqrt{3}-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi(3\sqrt{3}+1)}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{\pi(3\sqrt{3}+1)}{2} \end{cases}$

Dado que $\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}$, sendo a a aresta do cubo, tem-se $\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8} = \frac{\pi(3\sqrt{3}+1)}{2}$ e, portanto, $a^3 = 3(3\sqrt{3}+1) = 9\sqrt{3}+3$ e, finalmente, $a = \sqrt[3]{9\sqrt{3}+3}$.

32. **a)** Seja a a aresta do cubo truncado. Tem-se

$a^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}-1$

b) $\frac{7\sqrt{2}-7}{3}$

33. **a)** Todas são hipotenusas de triângulos retângulos iguais.

b) $\sqrt{18\sqrt{3}-30}$

2. Polinómios

Págs. 35 a 44

34. **a)** Grau: 4

Termos: $-\sqrt{3}\,x^4, 3x^3, 0x^3, -\frac{4}{3}x, -\pi$

Coeficientes: $-\sqrt{3}, 3, 0, -\frac{4}{3}, -\pi$

b) Grau: 9

Termos:

$\frac{t^9}{6}, 0t^8, 0t^7, 0t^6, t^5, 0t^4, 0t^3, -\sqrt{2}\,t^2, 0t, 10^{20}$

Coeficientes:

$\frac{1}{6}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -\sqrt{2}, 0, 10^{20}$

c) Grau: 0

Único termo: 10

Único coeficiente: 10

35. **a)** $7x^3$ **b)** $-3y^2$ **c)** $\frac{16a^4}{5}$ **d)** $\frac{-5b^7}{6}$

36. **a)** $x^5 - 6x^4 + 8x^3 + x^2 - 6$

b) $-5c^6 + \frac{2}{9}c^5 - 0{,}1c^4$

37. **a)** São iguais.

b) Não são iguais.

38. **a)** $2x^2 - 5x + 1$

b) $2x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 3x - \frac{25}{18}$

39. **a)** $6x - 8$

b) $-6x^3 + 15x^2 + 27x$

c) $20y^3 + 2y^2 - 82y + 56$

40. $P(x) \times Q(x)$ tem grau 7

$P(x) + Q(x)$ tem grau 4

$Q(x) - R(x)$ tem grau 3

$P(x) \times R(x) + Q(x)$ tem grau 7

$Q(x) + R(x)$ tem grau 2

41. **a)** $9 + 30x + 25x^2$ **b)** $\frac{x^2}{25} + \frac{6x}{5} + 9$ **c)** $\frac{x^4}{16} + 3x^2 + 36$ **d)** $2 + \sqrt{2}x^3 + \frac{x^6}{4}$ **e)** $3 + 12x + 12x^2$ **f)** $9x^4 + 12x^3 + 4x^2$ **g)** $64 - 16x + x^2$ **h)** $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1$ **i)** $\frac{x^6}{4} - 4x^4 + 16x^2$ **j)** $4 - 25x^2$ **k)** $x^4 - 64x^2$ **l)** $\frac{25x^4}{16} - 7$

42. **a)** $(x+4)^2$ **b)** $(2x+5)^2$ **c)** $(7x+1)^2$ **d)** $(x-10)^2$ **e)** $(5x-3)^2$ **f)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

43. **a)** $(x+3)(x-3)$ **b)** $(5+x)(5-x)$ **c)** $(4+7x)(4-7x)$ **d)** $\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)$ **e)** $(x^2+9)(x^2-9)$ **f)** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{5}\right)$

44. **a)** Quociente: $x+1$ Resto: -2

b) Quociente: $x^2 + 16x + 48$ Resto: 138

c) Quociente: $2x - 2$ Resto: 0

d) Quociente: $\frac{1}{3}$ Resto: $x + 6$

e) Quociente: 0 Resto: $x^2 + 4x - 8$

45. Quociente: $\frac{Q(x)}{2}$ Resto: 2

46. **a)** $3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$

b) $-x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 2x + 2)(-x+1)$

c) $2x^4 - x^3 - 4x - 3 = (x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 3)$

47. **b)** O quociente seria $(x-1)(x-3)$, ou seja, $x^2 - 4x + 3$ e o resto seria 0 (zero).

48. $B(x)$ tem grau 1 e o resto tem grau 0 (zero).

49. Seja R o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$.

Tem-se $P(x) = (x-1) \times Q(x) + R \Leftrightarrow$

Vem: $P(2) = (2-1) \times Q(2) + R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(2) = Q(2) + R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(2) = P(2) + R \Leftrightarrow R = 0$

Portanto, $P(x)$ é divisível por $x-1$.

50. $R(x) = -2x + 11$

51. **a)** Quociente: $2x^2 + x - 2$ Resto: 1

b) Quociente: $-3x^2 + 3x + 4$ Resto: 0

c) Quociente: $-4x^3 + 8x^2 - 6x + 12$ Resto: 1

d) Quociente: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ Resto: 2

52. **a)** -53 **b)** -20 **c)** 11

53. $a = 3$ e $b = -1$

55. -1, 1 e 3

56. $2x^4 - 3x - 5 = (x+1)(2x^3 - 2x^2 + 2x - 5)$

57. -5 e 2

58. Tem-se $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$

Vem: $P(\beta) = (\beta-\alpha)\,Q(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = (\beta-\alpha)\,Q(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q(\beta) = 0$

Portanto, β é uma raiz de $Q(x)$.

59. -3, 2 e 3 **60.** 8 e 16

61. Dividindo $4x^3 + 12x^2 - x - 3$ por $x+3$ obtém-se quociente $4x^2 - 1$ e resto 0.

Portanto,

$4x^3 + 12x^2 - x - 3 = (x+3)(4x^2 - 1)$.

Como -3 não é raiz do polinómio $4x^2 - 1$, tem-se que -3 é uma raiz simples do polinómio $4x^3 + 12x^2 - x - 3$.

62. 1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$.

63. **a)** $35x(2x + 1)$ **b)** $4x(-x + 25)$
c) $(10 + x)(10 - x)$ **d)** $(x + 5)^2$
e) $(3x + 1)^2$ **f)** $2x(x - 1)^2$
g) $x(1 + x)(1 - x)$ **h)** $x^4(x + 5)(x - 5)$

64. **a)** $(x + 4)(x - 3)$
b) $-5(x + 3)(x - 1)$
c) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$

65. **a)** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
b) $(x + 2)(x - 5)^2$
c) $(x - 2)(2x^2 + x + 6)$
d) $3(x - 1)^2(x + 4)$

66. **a)** $x(x - 1)(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$
b) $(x + 1)(x - 3)(x + 5)(x - 2)$
c) $(x - 2)^2(x + 1)(x - 1)$
d) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$

67. $a = 1$ e $b = 0$

68. **a)** Sejam a , b , c e d as quatro raízes inteiras.
Tem-se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.
Vem: $P(0) = (-a)(-b)(-c)(-d)$
pelo que $a_4 = abcd$.
b) Pela alínea anterior, o produto das quatro raízes é igual a a_4 .
Se a_4 for um número primo, não existem quatro números inteiros distintos cujo produto seja a_4 .
Portanto, o polinómio $p(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

69. $a - 1$ e $a + 1$

70. $(\pi - 2)x + 20$

71. $p(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^3 =$

$= \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^2(2 - 2x) =$

$= \frac{4}{3}\pi x^3 + (4 - 8x + 4x^2)(2 - 2x) =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 + 8 - 8x - 16x + 16x^2 + 8x^2 - 8x^3 =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 - 8x^3 + 24x^2 - 24x + 8 =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 - \frac{24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8 =$

$= \frac{4\pi - 24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8$

72. **a)** A área da base da pirâmide inicial é $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$, pelo que o seu volume é $\frac{1}{3} \times 72 \times 8 = 192$.
A nova pirâmide é semelhante à inicial, sendo a razão de semelhança das respetivas alturas igual a $\frac{8 - x}{8}$. Portanto, a razão de semelhança dos volumes é $\left(\frac{8 - x}{8}\right)^3$.
Tem-se:

$\left(\frac{8 - x}{8}\right)^3 = \frac{(8 - x)^3}{8^3} = \frac{(8 - x)^2(8 - x)}{512} =$

$= \frac{(64 - 16x + x)^2(8 - x)}{512} =$

$= \frac{512 - 192x + 24x^2 - x^3}{512}$

Portanto, o volume da nova pirâmide é:

$\frac{512 - 192x + 24x^2 + x^3}{512} \times 192 =$

$= \frac{192}{512} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) =$

$= \frac{3}{8} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) =$

$= -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192$

b) Se o tronco de cone tiver altura zero, a nova pirâmide coincide com a pirâmide inicial. Portanto, o volume da pirâmide inicial é igual a $p(0)$. Assim, o volume da pirâmide inicial coincide com o termo independente de $p(x)$.

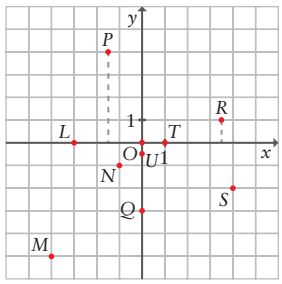
Tema 3 Geometria Analítica

1. Geometria analítica no plano

Págs. 46 a 58

1. **a)** $A(3,0)$, $B(4,3)$, $C(2,2)$, $D(0,1)$, $E(-1,4)$, $F(-3,2)$, $G(-4,0)$, $H(-2,-1)$, $I(-4,-3)$, $J(0,-2)$, $K(2,-4)$ e $L(3,-1)$

b)



2. -2

3. **a)** $d(A, B) = 13$
b) $d(C, D) = 5$
c) $d(E, F) = \frac{5}{2}$

4. Sejam $A(-3, 2)$, $B(7, 4)$, $C(8, -1)$ e $D(-2, -3)$ os vértices do retângulo.
Tem-se, por exemplo, $d(A, B) = \sqrt{104}$ e $d(B, C) = \sqrt{26}$.
Portanto, a área do retângulo é $\sqrt{104} \times \sqrt{26} = 2\sqrt{26} \times \sqrt{26} = 2 \times 26 = 52$ (unidades quadradas).

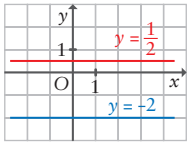
5. **a)** $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A) = \sqrt{125}$
b) $d(A, C) = 20$ e $d(B, D) = 10$
Portanto, a área do losango é $\frac{20 \times 10}{2} = 100$ (unidades quadradas).

6. **a)** $(5, 10)$ **b)** $(-1, -3)$ **c)** $(2, \sqrt{2})$

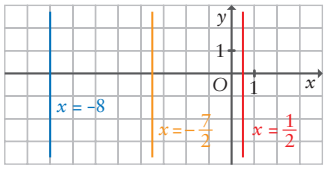
7. **a)** $(2, 1)$ **b)** 10π (unidades de comprimento)

8. $(5, 3)$

9. **a)** $A(-5, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 2)$ e $D(2, 2)$; $y = 2$
b) $r : y = -2$ $s : y = \frac{1}{2}$
c)

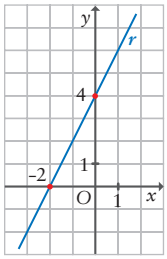


d) $E(3, 4)$, $F(3, 1)$, $G(3, -2)$ e $H(3, -4)$; $x = 3$
e) $d : x = -4$ $e : x = -1$
f)

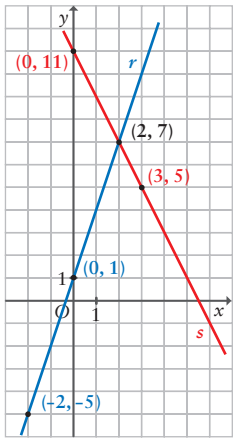


10. **a)** $y = 2x - 1$ **b)** $y = 3x + 4$ **c)** $y = -x - 2$
d) $y = \frac{1}{4}x - 1$ **e)** $y = -3x$ **f)** $y = x$
g) $y = -x$

11. **a)** 4 **b)** -2 **c)**
d₁) 10 **d₂)** -3
e) $y = 2 \times 3 + 4 = 10$;
$-2 = 2x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6 = 2x \Leftrightarrow -3 = x$

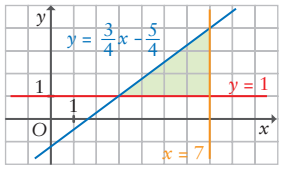


12. **a)** Por exemplo, $(0, 1)$ e $(-2, -5)$.
b) Por exemplo, $(0, 11)$ e $(3, 5)$.
c)



d) $(2, 7)$
e) $7 = 3 \times 2 + 1$ e $7 = -2 \times 2 + 11$

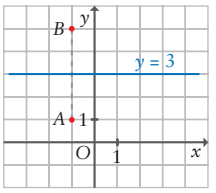
13. **a)**



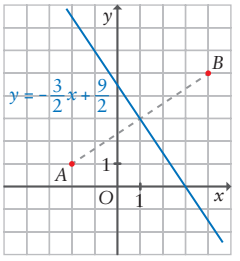
b) $(3, 1)$, $(7, 1)$ e $(7, 4)$

c) A área é 6 (unidades quadradas) e o perímetro é 12 (unidades de comprimento).

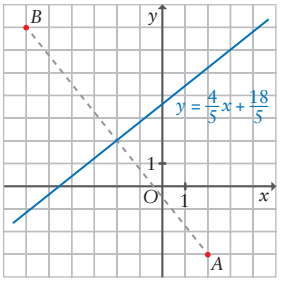
14. a) $y = 3$



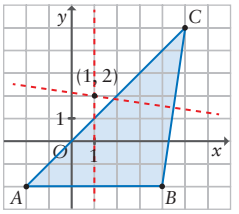
b) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$



c) $y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}$



15. a) e **b)**



c) Por exemplo, $\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

16. a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $x^2 + (y + 1)^2 = 16$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 = 1$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

f) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 10$

17. a) Centro $C(5, -4)$ e raio 6.

b) Centro $C(-1, 7)$ e raio $\sqrt{12}$ $(2\sqrt{3})$.

c) Centro $C(0, -3)$ e raio 1.

d) Centro $C(0, 0)$ e raio $\sqrt{5}$.

18. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

19. a) Centro $C(3, -2)$ e raio $\sqrt{14}$.

b) Centro $C(0, 4)$ e raio 4.

20. $\begin{cases} (x + 4)^2 + (y - 10)^2 = 50 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$

Os pontos de interseção são os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(3, 9)$.

21. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

b) 3

22. a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 36$

b) $x^2 + y^2 \leqslant 2$

c) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 > 16$

d) $(x - 2)^2 + y^2 < 9$

23. 7π (unidades quadradas)

24. Vamos designar o eixo maior por $2a$, o eixo menor por $2b$, a distância focal por $2c$, os focos por F_1 e por F_2 e os vértices por V_1, V_2, V_3 e V_4.

a) $2a = 10$; $2b = 8$; $2c = 6$; $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$; $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$, $V_3(0, 4)$ e $V_4(0, -4)$

b) $2a = 20$; $2b = 12$; $2c = 16$; $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$; $V_1(-10, 0)$, $V_2(10, 0)$, $V_3(0, 6)$ e $V_4(0, -6)$

c) $2a = 6$; $2b = 4$; $2c = 2\sqrt{5}$; $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$; $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(0, 2)$ e $V_4(0, -2)$

d) $2a = 14$; $2b = 4\sqrt{6}$; $2c = 10$; $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$; $V_1(-7, 0)$, $V_2(7, 0)$, $V_3(0, 2\sqrt{6})$ e $V_4(0, -2\sqrt{6})$

25. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ **d)** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

e) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$ **f)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

g) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

26. $2\sqrt{5}$

27. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

28. a) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

b) $F(2, 0)$

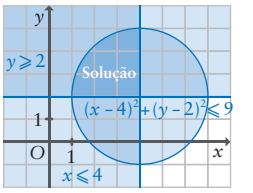
c) Sejam (x, y) as coordenadas de P; então, dado que P é um ponto da elipse, tem-se $y^2 = 2 - \frac{x^2}{3}$.

$$d(P, F) = \sqrt{\frac{2(x-3)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(3 - x) = \frac{\sqrt{6}}{3}(3 - x) \qquad d(P, r) = 3 - x$$

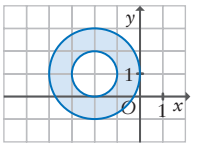
$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}(3 - x)}{3 - x} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

29. $\dfrac{\left(l + \frac{l}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}l^2$

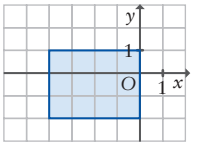
30. a)



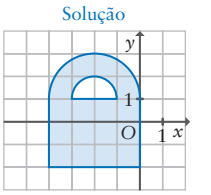
b) $1 \leqslant (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4$



$-4 \leqslant x \leqslant 0 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 1$



Solução



31. a) $y \leqslant 2$ **b)** $x > -1$

c) $y \geqslant x$ **d)** $y < -x$

32. $(|x| \leqslant 2 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 0) \vee x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$

33. a) 18 (unidades quadradas)

b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$

c) $r = d(A, D) = 5$

d) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 \leqslant 25 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 4 \wedge y \leqslant 7$

2. Cálculo vetorial no plano

Págs. 59 a 68

34. a)

Vetores	Mesma direção?	Mesmo sentido?	Mesma norma?	Iguais?
$\vec{a}$ e $\vec{b}$	Não		Sim	Não
$\vec{b}$ e $\vec{c}$	Sim	Sim	Não	Não
$\vec{d}$ e $\vec{e}$	Sim	Não	Sim	Não
$\vec{c}$ e $\vec{f}$	Sim	Sim	Sim	Sim

b) $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 3$

c) d e $\vec{e}$

35. a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (por exemplo)

b) $\sqrt{80}$

36. a) $\overrightarrow{AG}$ **b)** $\overrightarrow{LA}$ **c)** $\overrightarrow{EC}$

d) $\overrightarrow{OH}$ **e)** $\overrightarrow{EF}$ **f)** $\overrightarrow{LJ}$

g) $\overrightarrow{NG}$ **h)** $\overrightarrow{OP}$ **i)** $\overrightarrow{AF}$

j) $\overrightarrow{LM}$ **k)** $\overrightarrow{EJ}$ **l)** $\vec{0}$

37. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

38. $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$; $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{d}$; $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{c}$;

$\vec{f} = -4\vec{e}$; $\vec{e} = -\frac{1}{4}\vec{f}$; $\vec{g} = 2\vec{h}$; $\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{g}$;

39. **a)** $\overrightarrow{AG}$ **b)** $\overrightarrow{LO}$ **c)** $\overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BG}$

40. **a)** $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$

b) $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

41. Tem-se: $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ}$

Vem: $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}) = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Tem-se, também: $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SR}$

Vem: $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}) = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Portanto, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donde vem $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

Conclui-se, assim, que os segmentos $[PQ]$ e $[SR]$ são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Portanto, o quadrilátero $[PQRS]$ é um paralelogramo.

42. Primeiro caso: $\vec{a} = \vec{0}$

Se $\vec{a} = \vec{0}$, então $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} - \vec{b} = \vec{0} - \vec{b} = -\vec{b}$

Como dois vetores simétricos são colineares, tem-se que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

Segundo caso: $\vec{a} = \vec{b}$

Se $\vec{a} = \vec{b}$, então $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Como o vetor nulo é colinear com qualquer vetor, também neste caso os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ colineares.

Terceiro caso: $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{a} \neq \vec{b}$

Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ colineares, existe um número real λ tal que $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Como estamos a admitir que $\vec{a} \neq \vec{b}$, tem-se $\lambda \neq 1$.

Vem: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{a} = (1 + \lambda)\vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \lambda\vec{a} = (1 - \lambda)\vec{a}$

Portanto, $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}(\vec{a} - \vec{b})$. Logo, os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

43. $\vec{a}(6, 2)$; $\vec{b}(0, -2)$; $\vec{c}(-3, 0)$; $\vec{d}(1, -3)$; $\vec{e}(-3, -5)$

44. $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(7, 4)$ e $\vec{w}(4, -6)$

a₁) $(5, 7)$ **a₂)** $(-9, -1)$

a₃) $(20, -1)$ **a₄)** $(23, 9)$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{65}$

c) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

d) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares.

e) $k = -21$

f) $\frac{4}{\sqrt{13}}\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left(-\frac{8}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}\right) =$
$= \left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, \frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$

45. $(6, -2)$

46. **a)** C **b)** M **c)** P **d)** G

47. **a)** $(2, 3)$ **b)** $(-10, 17)$

48. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$

49. **a)** $\overrightarrow{AD}$ **b)** J **c)** A

50. $(-8, 5)$ **51.** $(4, 5)$

52. $(5, 7)$ **53.** $k = 1$

54. **a)** $(-2, 5)$ (por exemplo)

b) $-\frac{5}{2}$ **c)** $y = -\frac{5}{2}x + 8$

55. **a)** $(1, 5)$ (por exemplo) **b)** $k = 15$

56. $(8, 0)$ e $\left(0, -\frac{16}{5}\right)$

57. $y = -2x - 9$

58. $(0, 4)$ (por exemplo)

59. $(-1, 1)$ (por exemplo)

60. **a)** $k = 7$ **b)** $y = 2x - 8$

61. **a)** Não **b)** Sim **c)** Sim

d) Não **e)** Não **f)** Não

g) Não **h)** Sim **i)** Sim

62. Por exemplo:

a) $(x, y) = (-1, 4) + k(3, -2)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

b) $(x, y) = (-1, 4) + k(4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 4 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

c) $(x, y) = (0, 0) + k(1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = k \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

d) $(x, y) = (0, 1) + k(-1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

e) $(x, y) = (0, 2) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

f) $(x, y) = (0, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

63. Por exemplo:
$(x, y) = (3, -1) + k(-6, 6)$, $k \in [0, +\infty[$

64. Por exemplo:
$(x, y) = (5, -2) + k(0, 4)$, $k \in [0, 1]$

65. **a)** $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

b₁) $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in [0, 2]$ (por exemplo)

b₂) $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in [0, +\infty[$ (por exemplo)

c) $k = -2$

66. **a)** $(-1)^2 + 3^2 + 8 \times (-1) - 2 \times 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + 9 - 8 - 6 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

b₁) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

b₂) $(x, y) = (-1, 3) + k(3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

b₃) $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

3. Geometria analítica no espaço

Págs. 69 a 78

67. **a)** $P(3, 3, 4)$ **b)** $Q(-2, -5, 3)$

c) $R(4, 3, -2)$

68. **a)** $A(2, 3, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(2, 4, -1)$, $D(-1, 4, 1)$, $E(-2, 4, -2)$, $F(-2, -3, 2)$, $G(2, -4, 1)$, $H(2, -3, -1)$, $I(0, 2, 2)$

b₁) $(2, 3, -2)$ **b₂)** $(2, -1, 0)$

b₃) $(-2, 4, -1)$ **b₄)** $(2, 3, 1)$

b₅) $(1, 4, -1)$ **b₆)** $(2, 3, 2)$

b₇) $(-2, -4, 1)$

69. $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(2, 0, 2)$, $E(2, 2, 2)$, $F(0, 2, 2)$, $G(0, 0, 2)$, $P(1, 1, -2)$ e $Q(1, 1, 4)$

70. **a)** $A(0, 0, 4)$, $B(0, 4, 4)$, $C(4, 4, 4)$, $D(4, 0, 4)$ e $E(2, 2, -2)$

b) 32 (unidades cúbicas)

c) $4\sqrt{10}$ (unidades de área)

71. **a)** yOz **b)** xOz **c)** xOy

72. **a)** $y = 4$ **b)** $z = 2$ **c)** $x = -3$

73. **a)** $O(0, 0, 0)$, $P(2, 0, 0)$, $Q(2, 2, 0)$, $R(0, 2, 0)$, $S(0, 0, 4)$, $T(2, 0, 4)$, $U(2, 2, 4)$ e $V(0, 2, 4)$

b) $x = 2$ **c)** $z = 4$

d) $\frac{16}{3}$ (unidades cúbicas)

e) $4\sqrt{2}$ (unidades de área)

74. **a₁)** Oz **a₂)** Oy **a₃)** Ox

b) Por exemplo: $(0, 4, -10)$.

75. **a₁)** Oz **a₂)** Ox **a₃)** Oy

b₁) $x = 2 \wedge y = 4$

b₂) $y = 4 \wedge z = 6$

b₃) $x = 2 \wedge z = 6$

76. **a)** $G(-2\sqrt{3}, 2, 12)$
b) $x = 2\sqrt{3} \wedge y = 2$
c) $x = 2\sqrt{3} \wedge z = 0$
d) $288\sqrt{3}$

77. **a)** 9 **b)** 14 **c)** 5
d) 15 **e)** $\sqrt{14}$

78. **a)** 343 (unidades cúbicas)
b) $y = 5$ **c)** $y = 3 \wedge z = 6$

79. **a)** $x = 5$ **b)** $x = 0 \wedge y = 5$
c₁) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$ **c₂)** $\sqrt{\frac{187}{2}}$

80. **a)** $x = 0$ **c)** $5x - y + 2z - 7 = 0$
b) $x = y$ **d)** $3x + 3y - 2z + 21 = 0$

81. **a)** $3 - 2 \times 3 + 3 \times (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 - 6 - 3 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$; portanto, as coordenadas do ponto R satisfazem a equação do plano.
b) 7 (unidades de comprimento)

82. **a)** $\frac{448}{3}$ (unidades cúbicas)
b) $x + y = 8$ **c)** $z = 7$
d) $y = 8 \wedge z = 7$ **e)** $x = 4 \wedge y = 4$
f) $(-8, 8, 7)$

83. **a)** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$
b) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$
c) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$
d) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
e) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

84. **a)** $(5, -4, 1)$; 6
b) $(-1, 7, -3)$; $\sqrt{12}$
c) $(0, -3, 0)$; 1
d) $(0, 0, 0)$; $\sqrt{5}$
e) $(1, 2, 3)$; 6
f) $(0, -5, 4)$; 9

85. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 76$

86. 9π (unidades de área)

87. **a)** $H(1, -2, 0)$
b) Tem-se $\overline{GF} = 3$, $\overline{EF} = 1$, $\overline{BF} = 1$.
O volume do paralelepípedo é $3 \times 1 \times 1 = 3$.
A área da base da pirâmide é $3 \times 1 = 3$ e a altura da pirâmide é $c - 1$.
O volume da pirâmide é:
$$\frac{1}{3} \times 3 \times (c-1) = c - 1$$
O volume do sólido é, portanto, igual a:
$$3 + c - 1 = 2 + c$$

88. **a)** $x = 2 \wedge y = 2$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$
c) $3\pi - 4\sqrt{2}$

89. **a)** $x = 3 \wedge z = 3$
b) $(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 \leqslant 9$
c) 108π (unidades cúbicas)
d) $24 + 8\sqrt{2}$ (unidades de comprimento)

90. **a)** $x + y = 2$
b) Não pertence.
c) $y = 2 \wedge z = 0$
d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$
e) $0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 2 \wedge$ $\wedge (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$

91. **a)** $6x - 10y - 2z + 19 = 0$
b) Não pertence.
c) $\frac{\sqrt{174}}{2}$ (unidades de área)
d) $x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$

4. Cálculo vetorial no espaço

Págs. 79 a 84

92. Por exemplo:
a₁) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ **a₂)** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$
a₃) $\overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{BG}$ **a₄)** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EB}$
b₁) $\overrightarrow{AG}$ **b₂)** $\overrightarrow{AG}$
b₃) $\overrightarrow{EB}$ **b₄)** $\overrightarrow{AH}$
b₅) D **b₆)** E
b₇) H **b₈)** $\overrightarrow{FE}$
b₉) B **b₁₀)** D

93. **a₁)** $(-2, -1, 2)$
a₂) $(8, -6, 8)$
a₃) $(8, 4, -8)$
a₄) $(-6, -3, 6)$
a₅) $(1, -2, 3)$
b) $(x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-10)^2 = 9$
c) $\vec{v} = -3\vec{u}$

94. **a)** $\vec{v} = -4\vec{u}$; são colineares.
b) Não são colineares.
c) $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{u}$; são colineares.
d) Não são colineares.
e) Não são colineares.
f) $\vec{u} = -2\vec{v}$; são colineares.
g) Não são colineares.
h) $\vec{u} = -5\vec{v}$; são colineares.

95. $\vec{v}\,(-6, 18, -9)$

96. **a)** $(3, 3, 10)$ **b)** $(25, 2, 21)$
c) $(-9, -1, 2)$ **d)** $(4, -5, 7)$

97. $a = 2$, $b = -5$ e $c = 0$

98. P pertence à superfície esférica de centro em C e raio igual a $\|\vec{v}\|$ se e só se $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$; ora $P = C + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \vec{v}$ e, portanto, $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$.

99. $V\,(-1, 12, 15)$

100. **a)** $(3, -9, 3)$ **b)** $(-5, 5, -9)$
c) $(2, 4, 6)$ **d)** $(-2, 6, -2)$

101. **a)** $\sqrt{(2-(-1))^2 + (4-3)^2 + (-1-(-5))^2} =$ $= \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$
b) $\overrightarrow{AB} = B - A$; portanto, as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(2, 4, -1) - (-1, 3, -5) =$ $= (2 - (-1), 4 - 3, -1 - (-5)) = (3, 1, 4)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

102. $-\frac{1}{2}$

103. **a)** $(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + 3^2 = 14 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + 4 + 9 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14$; as coordenadas do ponto A satisfazem a equação que define a superfície esférica, portanto, o ponto A pertence à superfície esférica.
b) $B(2, -3, -3)$

104. **a)** $H(9, 3, 17)$
b) $(x-11)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 49$
c) $x = 6 \wedge z = 15$

105. **a)** $(-2, 4, 8)$ **b)** $\left(\frac{7}{2}, -4, -\frac{3}{2}\right)$

106. $(x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 51$

107. Por exemplo:
a) $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(2, -3, 4), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
b) $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(-2, -2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
c) $(x, y, z) = (3, 2, 0) + \lambda(0, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
d) $(x, y, z) = (1, 0, 4) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
e) $(x, y, z) = (0, 5, -1) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

108. Por exemplo:
$(x, y, z) = (0, 5, 4) + \lambda(3, 0, -4), \lambda \in \mathbb{R}$

109. **a)** Por exemplo:
$(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(2, 4, -2), \lambda \in \mathbb{R}$
b) Por exemplo: $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
c) $(10, -16, 10)$
d) Ponto P

110. **a)** $(-2, 7, 18) = (1, -2, 3) + 3(-1, 3, 5)$
b) Seja $\vec{s}(-1, 3, 5)$ um vetor diretor da reta s; tem-se $\overrightarrow{AB}(2, -6, -10)$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} = -2\vec{s}$. Então, as retas s e AB são paralelas pois admitem vetores diretores colineares.

111. **a)** 192 (unidades de área)

b) Por exemplo, $\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 10\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $x = 4$

d) $(-4, 4, 10)$

e) $(2, -2, -5)$

f) $\left(2, 1, \frac{15}{2}\right)$

g) $2y + 5z = 29$

h) $(x-2)^2 + y^2 + (z-10)^2 = 29$

i) $\frac{480 - 40\pi}{3}$ (unidades cúbicas)

112. **a)** 27π (unidades cúbicas)

b) $x = 9$

c) 27 (unidades quadradas)

113. **a)** Por exemplo:
$(x, y, z) = (10, 0, 0) + \lambda(-10, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

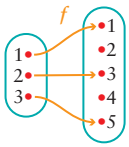
b) $\frac{25}{3}$ (unidades de volume)

Tema 4 Funções Reais de Variável Real

1. Generalidades acerca de funções

Págs. 86 a 92

1. **a)**



b₁) 5

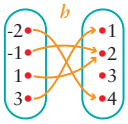
b₂) 3

b₃) 1

b₄) $\{1, 3, 5\}$

2. $\{(-5, 11), (1, -1), (7, -13), (13, -25)\}$

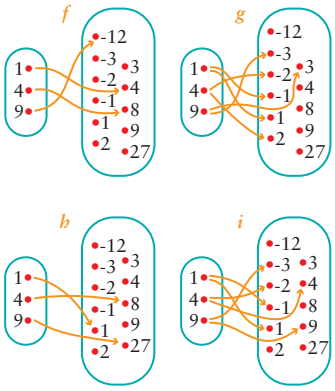
3. **a)**



b) Domínio: $\{-2, -1, 1, 3\}$
Contradomínio: $\{1, 2, 4\}$

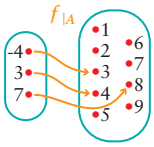
c) $\{-2, -1, 1\}$

4. **a)**



b) As correspondências g e i não são funções de A em B, porque os objetos têm mais do que uma imagem.

5. **a)**

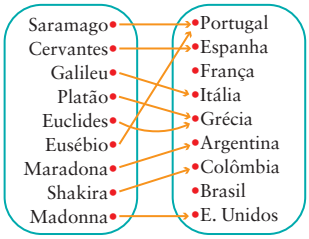


b)

x	-4	9
$f(x)$	3	2

c) $\{3, 5, 7\}$

6. **a)**



b) Domínio: {Eusébio, Maradona}
Conjunto de chegada: B

x	Eusébio	Maradona
$f\|_C(x)$	Portugal	Argentina

7. **a)** As soluções da condição $g(x) = h(x)$ são 6, 8 e 10.

b) $\{2, 8, 100\}$

c) $\{4, 16\}$

8. **a)**

x	3	7	11	15
$f(x)$	1	4	7	10

b) A função f é injetiva porque não existem objetos diferentes com a mesma imagem.

9. **a)** Por exemplo:

x	5	6	7	8	9	25
$f(x)$	14	5	14	20	3	5

b) Não, porque, por exemplo, 5 e 7 têm a mesma imagem.

c) $\{5, 6, 8, 9\}$

10. Se $f(m)$ fosse igual a 2, ter-se-ia $2 \times f(n) = 4$, donde viria $f(n) = 2$. Portanto, m e n teriam a mesma imagem, o que contraria o facto de f ser uma função injetiva.

11. A função f não é sobrejetiva, pois o seu contradomínio é $\{1, 2, 4\}$, que é diferente de B (conjunto de chegada).

12. **a)** 5

b) $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x-4}{3} = y \Leftrightarrow 5x - 4 = 3y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x = 3y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{3y+4}{5}$

Portanto, para cada número real y, existe um número real x tal que $f(x) = y$.

Esse número real x é igual a $\frac{3y+4}{5}$.

c) Para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y. Portanto, todos os elementos do conjunto de chegada pertencem ao contradomínio. Portanto, o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

13. **a)** Não.
Os objetos «Torre» e «Peão» têm a mesma imagem, pelo que a função f não é injetiva. Logo, a função f não é bijetiva.

b) Sim. A função g é injetiva e sobrejetiva. Logo, a função f é bijetiva.

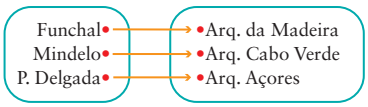
14. Tem-se: $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 4 = 3b + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b$

Portanto, f é injetiva.
Seja $y \in \mathbb{R}$. Tem-se: $3x + 4 = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{3}$

Portanto, para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y.
Assim, f é sobrejetiva. Portanto, a função f é bijetiva.

15. Como A tem cinco elementos e B tem quatro, qualquer função de A em B tem pelo menos dois objetos com a mesma imagem, e portanto não é injetiva. Logo, não é bijetiva.
Como cada objeto só pode ter uma imagem, qualquer função de B em A não é sobrejetiva. Logo, não é bijetiva.

16.

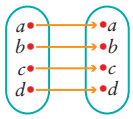


17. **a)**

x	-2	-1	2	3
$g(x)$	4	1	4	9

x	1	4	9	16
$f(x)$	2	8	18	32

b)



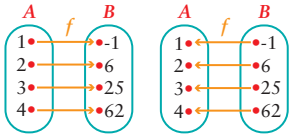
c) $(f \circ g)(x) = 2x^2$

18. **a)** $\{8, 13\}$

b) $(i \circ h)(x) = i[h(x)] = i(x-4) = \sqrt{x-4}$

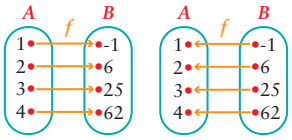
c) $\{2, 3\}$

19.



20. $(f \circ f)(x) = f(x) \Leftrightarrow f[f(x)] = f(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = x$ (pois f é injetiva)

21. **a)**



b) $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}[f(1)] = f^{-1}(-1) = 1$

$(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}[f(2)] = f^{-1}(6) = 2$

$(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}[f(3)] = f^{-1}(25) = 3$

$(f^{-1} \circ f)(4) = f^{-1}[f(4)] = f^{-1}(62) = 4$

Portanto, $f^{-1} \circ f = Id_A$.

$(f \circ f^{-1})(-1) = f[f^{-1}(-1)] = f(1) = -1$

$(f \circ f^{-1})(6) = f[f^{-1}(6)] = f(2) = 6$

$(f \circ f^{-1})(25) = f[f^{-1}(25)] = f(3) = 25$

$(f \circ f^{-1})(62) = f[f^{-1}(62)] = f(4) = 62$

Portanto, $f \circ f^{-1} = Id_B$.

22. **a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{6}$

b) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(6x+5) =$

$= \dfrac{6x+5-5}{6} = \dfrac{6x}{6} = x$

Portanto, $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{x-5}{6}\right) =$

$= 6 \times \dfrac{x-5}{6} + 5 = x - 5 + 5 = x$

Portanto, $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$.

23. **a)** $f(x) = ax + b$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow ax + b = \dfrac{x-b}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x + ab = x - b \Leftrightarrow a^2x - x = -b - ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(a^2-1) = -b - ab \Leftrightarrow x = \dfrac{-b-ab}{a^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b(1+a)}{(a-1)(a+1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$

Portanto, o número real x_0 tal que

$f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ é $\dfrac{b}{1-a}$.

2. Generalidades acerca de funções reais de variável real

Págs. 93 a 102

24. h não é função real de variável real porque D_h não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

25. **a)** $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

e) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

f) $[-5, +\infty]$

g) $\mathbb{R}$

h) $[-2, +\infty[\setminus \{0\}$

i) $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right] \setminus \{2\}$

j) $]-\infty, 3] \setminus \{0, 2\}$

k) $]6, +\infty[$

l) $\mathbb{R}_0^+$

m) $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

n) $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$

o) $\left[\dfrac{1}{2}, 8\right] \setminus \{5\}$

p) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$

26. **a)**

x	-3	0	3
$f(x)$	10π	4π	$2\sqrt{10}\pi$

x	1	2	4
$g(x)$	-5	2	10

x	$\overrightarrow{PQ}$	$\overrightarrow{PR}$	$\overrightarrow{QR}$
$h(x)$	$\sqrt{13}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$

b) A função h não é função real de variável real porque o seu domínio não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

27. **a)**

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	2	-2	3	1	-1	2

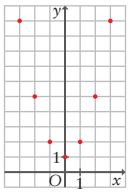
b) $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$D'_f = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

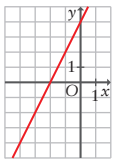
c) $\{-1, 4\}$

d) $\{-2, 0, 3\}$

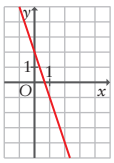
28.



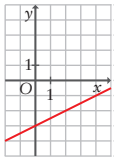
29. **a)**



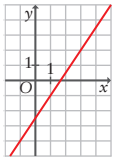
b)



c)



d)



30. **a)** $(6, 0)$

b) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{2}$

31. B; C; E

32. A imagem de 2 não pode ser simultaneamente 3 e -4.

33. **a)** 6

b) Não, porque a imagem de a não pode ser simultaneamente 5 e 7.

34. A; D; E

35. $A(a, -a)$; $\overline{OA} = -\sqrt{2}a$

$B(b, b)$; $\overline{OB} = \sqrt{2}b$

$\overline{OA} = \overline{OB} \Leftrightarrow -a = b$

$f(a) = -a = b = f(b)$

a e b têm a mesma imagem, logo f não é injetiva.

36. 12

37. **a)** f é par.

b) g não é par.

c) h é par.

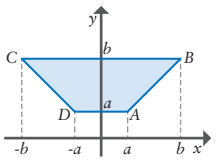
38. Não porque $10 \in D_f$ mas $-10 \notin D_f$.

39. f não é par.

40. A; B

41. $\{-6, 6\}$

42. Tem-se $A(a, a)$ e $B(b, b)$.



Como os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, tem-se $g(a) = a$ e $g(b) = b$.

Como a função g é par, tem-se:

$-a \in D_g$, $-b \in D_g$, $g(-a) = g(a)$ e $g(-b) = g(b)$.

Portanto, os pontos $C(-b, b)$ e $D(-a, a)$ pertencem ao gráfico da função g.

O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio, cuja área é:

$\dfrac{2b+2a}{2} \times (b-a) = (b+a)(b-a) = b^2 - a^2$

43. Designemos por a abcissa de A e por b a abcissa de B, com $a \neq b$.

Suponhamos que $b = -a$.

Nesse caso, as coordenadas de A seriam $(a, a+2)$ e as coordenadas de B seriam $(b, b+2) = (-a, -a+2)$. Como f é par, viria $a + 2 = -a + 2 \Leftrightarrow a = 0$, pelo que b também seria 0, o que é impossível porque $a \neq b$.

44. -3

45. $f(0) + f(1) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow 0 + f(1) = 1 - f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{2}$

46. $D'_f = \{-2, 1, 3\}$; $D'_g = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$

47. **a)** par

b) nem par nem ímpar

c) nem par nem ímpar

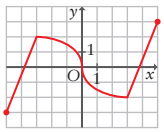
d) par

e) ímpar

f) ímpar

48. A; C

49.



50. **a)** g **b)** f

c) g **d)** f

51. f é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-x)^{2n+1} + b(-x)^{2n-1} + c =$

$= -(ax^{2n+1} + bx^{2n-1} + c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-x)^{2n}(-x) + b(-x)^{2n}(-x)^{-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -ax^{2n} \times x - bx^{2n} \times x^{-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = -c \Leftrightarrow c = 0$

52. **a)** Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = x + 1$ é injetiva mas não é ímpar.

b) Falsa, por exemplo a função representada no exercício **48** (**C**) é ímpar e não é injetiva.

c) Verdadeira, se o domínio é $\mathbb{R}$, 0 pertence ao domínio, logo a imagem de zero é zero, pelo que o seu gráfico interseta a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

d) Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = 0$ é simultaneamente par e ímpar.

53. $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) =$

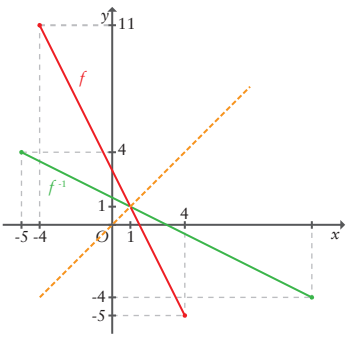
$= (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}$

54. 6

55. **a)**

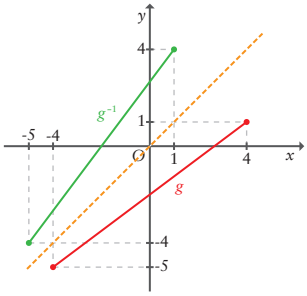
$f^{-1} : [-5, 11] \to [-4, 4]$

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



b) $g^{-1} : [-5, 1] \to [-4, 4]$

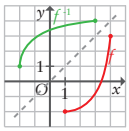
$g^{-1}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$



56. **a)** $a = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{5}{3}$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

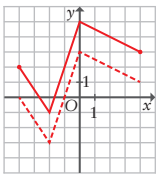
57. **a)** $f^{-1}(-1) = 3$

b)

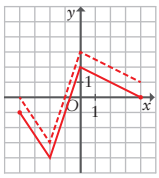


58. Em cada alínea está, a tracejado, o gráfico original e, a cheio, o transformado.

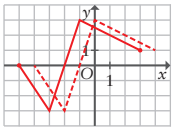
a)



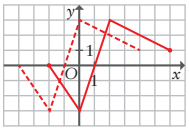
b)



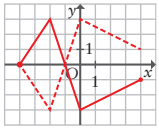
c)



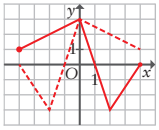
d)



e)

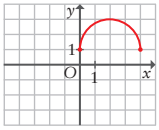


f)

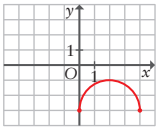


59.

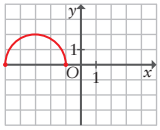
a)



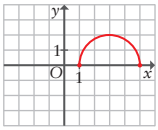
b)



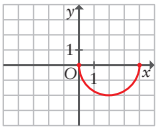
c)



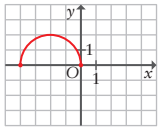
d)



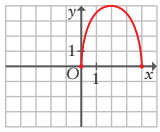
e)



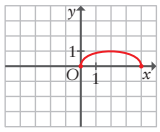
f)



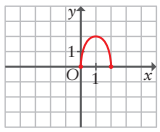
g)



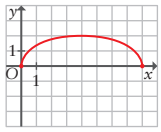
h)



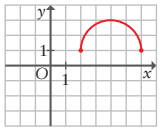
i)



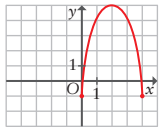
j)



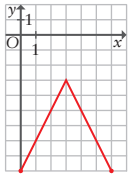
k)



l)



60.



61. Sendo a a abcissa dos pontos de interseção dos gráficos, tem-se $f(a) = f(a - 3)$.

Portanto, a função f não é injetiva.

3. Monotonia, extremos e concavidade

Págs. 103 a 109

62. **a)** Imagem de zero: 6 Zero: $-\frac{9}{2}$

b) Imagem de zero: –9 Zeros: $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$

c) Imagem de zero: 16 Zero: 4

d) Imagem de zero: 4 Zeros: $\frac{1}{2}$ e 4

e) Imagem de zero: 0 Zeros: – 2 e 0

f) Imagem de zero: 0 Zeros: 0 e 4

g) Imagem de zero: –6 Zeros: 1, 2 e 3

h) Imagem de zero: –3

Zeros: -3, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

63. $p = -1$ e $q = -6$

64. $a = -5$, $b = -8$ e $c = 12$

65. Imagem de zero: –2 Zeros: $-3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 3

66. **a)** Imagem de zero: 6 Zeros: 2 e 4

b) $\{0, 1\}$

c) $\{3, 5\}$

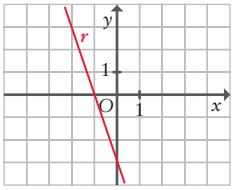
67. **a)** Imagem de zero: –2 Zeros: –3, 1 e 4

b) $[-5, -3[\cup]1, 4[$

c) $]-3, 1[\cup]4, 5]$

68. **a)** $h(x) = -3x - 3$

b)



c) $]-\infty, -1[$ **d)** $]-1, +\infty[$

69. Como a função g é positiva, o seu gráfico está acima do eixo Ox.
O gráfico de h também está acima do eixo Ox, pois ele é obtido a partir do gráfico de g por meio de uma translação horizontal. Portanto, a função h também é positiva em $\mathbb{R}$.

70. Como $f(0) = -2$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) < -2$, a função f é negativa em $[0, +\infty[$.
Como f é par, tem-se $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
Portanto, a função f também é negativa em $]-\infty, 0[$, pelo que a função f é negativa em $\mathbb{R}$. Assim, é a primeira proposição que é verdadeira.

71. **a)** $D'_f = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) Tem-se: $\forall x \in D_f, 1 \leqslant f(x) \leqslant 9$

72. Como o conjunto de chegada da função g é $\mathbb{R}^+$, tem-se $D'_g \subset \mathbb{R}^+$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.
Como, por hipótese, se tem $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 5$, vem: $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < g(x) < 5$. Portanto, a função g é limitada.

73. Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, -3 \leqslant g(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 6 \geqslant -2g(x) \geqslant -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 11 \geqslant -2g(x) + 5 \geqslant -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3 \leqslant h(x) \leqslant 11$

Portanto, a função h é limitada.

74. **a)** g é majorada; 0 é um majorante
h é majorada; 4 é um majorante
i é majorada; 16 é um majorante
k é majorada; 3 é um majorante

b) f é minorada; 0 é um minorante
h é minorada; -5 é um minorante
i é minorada; -6 é um minorante
k é minorada; 0 é um minorante

c) h, i e k

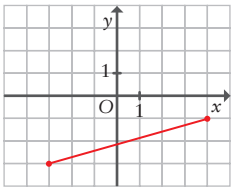
75. Tem-se $\forall x \in A \cup B, -4 < h(x) < 8$.
Portanto, a função h é limitada.

76. Como função f é limitada, existem m e M tais $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Portanto, $D'_f \subset [m, M]$.
Como $D'_g \subset D'_f$ e $D'_f \subset [m, M]$, vem $D'_g \subset [m, M]$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant g(x) \leqslant M$.
Logo, a função g é limitada.

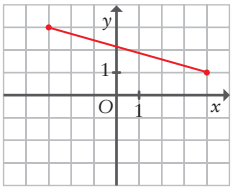
77. **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V
e) V **f)** F **g)** V **h)** V

78. **a)** V **b)** V **c)** V **d)** F
e) F (Repara que $3 > -1$, mas $f(3) > f(-1)$).

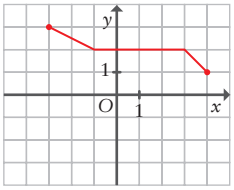
79. **a)** Por exemplo:



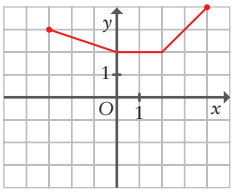
b) Por exemplo:



c) Por exemplo:



d) Por exemplo:



80. **(C)**

81. **a)** Tem-se, para quaisquer reais a e b:

$f(b) > f(a) \Leftrightarrow 3b - 4 > 3a - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3b > 3a \Leftrightarrow b > a$

Portanto, $f(b) > f(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow f(b) > f(a)$.

b) Tem-se, para quaisquer reais a e b:

$g(b) < g(a) \Leftrightarrow -b + 2 < -a + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -b < -a \Leftrightarrow b > a$

Portanto, $g(b) < g(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow g(b) < g(a)$.

82. Tem-se, para quaisquer reais a e b:
$b > a \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow -f(b) > -f(a) \Rightarrow g(b) > g(a)$
Portanto, $b > a \Rightarrow g(b) > g(a)$.

83. **a)** $D'_f = \{-3, -1, 0, 1, 2, 5\}$

b) -3 **c)** 5

84. **a)** $D'_g = [-2, 6]$

b) Mínimo absoluto: -2.
Máximo absoluto: 6.

85. **a)** $]3, 7[$ **b)** $]-5, -3[$ **c)** $]0{,}5; 1[$

86. **a)** $]2, 5]$ **b)** $[-4, -3[$

87. **a)** $[-4, 4]$ **b)** 4 **c)** -4

d) A função f tem um máximo relativo igual a 3 para $x = -5$ e tem um máximo relativo igual a 4 para $x = 3$.

e) A função f tem um mínimo relativo igual a -3 para $x = -1$ e tem um mínimo relativo igual a -4 para $x = 5$.

88. Como n é par, tem-se, para qualquer número real x, $x^n \geqslant 0$, donde vem $ax^n \geqslant 0$, pois $a > 0$.
Daqui resulta que $ax^n - b \geqslant -b$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant -b$.
Por outro lado, tem-se $f(0) = -b$.
Como $f(0) = -b$ e como $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant -b$, vem que $-b$ é a menor das imagens.
Portanto, $-b$ é o mínimo absoluto da função f.

89. **a)** Tem-se $A(a, 5a^2)$ e $B(b, 5b^2)$.
O declive da reta AB é

$$\frac{5b^2 - 5a^2}{b - a} = \frac{5(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{5(b - a)(b + a)}{b - a} =$$
$$= 5(b + a) = 5a + 5b$$

b) O declive da reta PQ é $5p + 5q$.
O declive da reta QR é $5q + 5r$.
Como $p < r$, tem-se $5p < 5r$, pelo que $5p + 5q < 5q + 5r$.
Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

90. Sejam A e B dois pontos de f de abcissas a e b, respetivamente, com $a > b$.
Tem-se $A(a, -3a^2 + 2a + 6)$ e $B(b, -3b^2 + 2b + 6)$.
O declive da reta AB é:

$$\frac{-3b^2 + 2b + 6 - (-3a^2 + 2a + 6)}{b - a} =$$
$$= \frac{3a^2 - 3b^2 - 2a + 2b}{b - a} =$$
$$= \frac{3(a^2 - b^2) - 2(a - b)}{b - a} =$$
$$= \frac{3(a - b)(a + b) - 2(a - b)}{b - a} =$$
$$= \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{b - a} =$$
$$= \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{-(a - b)} =$$
$$= -[3(a + b) - 2] = 2 - 3a - 3b$$

Sejam P, Q e R três pontos do gráfico da função f, de abcissas p, q e r, respetivamente, com $p < q < r$. O declive da reta PQ é $2 - 3p - 3q$. O declive da reta QR é $2 - 3q - 3r$. Como $p < r$, tem-se $-3p > -3r$, pelo que $2 - 3p - 3q > 2 - 3q - 3r$. Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

4. Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções

Págs. 110 a 127

91. **(A)**, **(B)** e **(C)**

92. **a)** $f(x) = 3(x - 5)^2$

b) $x = 5$

c) $(7, 8)$

93. **a₁)** -2 e 2

a₂) Coordenadas do vértice: $(0, -4)$.
Equação do eixo de simetria: $x = 0$.
O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

b₁) -2 e 2

b₂) O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

b₃) 3

c₁) O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

c₂) $b = 5$ e o maior zero é igual a 7.

d₁) $k = 9$

d₂) $3(x-5)^2 - 3 = 3x^2 - 30x + 72$

d₃) 72

94. **a)** $(-3, 4)$

b₁) $x^2 + y^2 = 25$ **b₂)** $(-3, -4)$ **b₃)** 24

95. **a)** $4x^2 - 12x + 3 = 4(x^2 - 3x) + 3 =$

$= 4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6$

b) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

c) $56\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

96. **a)** $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ **b)** $x = \frac{3}{2}$

c) $x = \frac{3}{2}$ **d)** 2

97. **a₁)** -1

a₂) $x = -1$

a₃) Concavidade voltada para cima.

a₄) -4 e 2

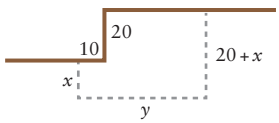
a₅) $]-4, 2[$

b₁) $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 3$

b₂) $\left(0, -\frac{26}{3}\right)$

98. $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$

99. **a)** Tem-se, de acordo com o esquema seguinte:



$x + y + 20 + x = 100$

Daqui vem: $y = 80 - 2x$

Portanto, a área do jardim é dada por:

$(80 - 2x)(20 + x) - 10 \times 20 =$
$= 1600 + 80x - 40x - 2x^2 - 200 =$
$= -2x^2 + 40x + 1400$

b) $x = 10$ Área $= 1600$

100. **a)** $]-3, 3[$ **b)** $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

c) $]0, 15[$ **d)** $\left[-\frac{1}{3}, 4\right]$

e) $\mathbb{R}$ **f)** $\{-2\}$ **g)** $\varnothing$ **h)** $\left[0, \frac{4}{3}\right]$

101. **a)** 5 litros **b)** 16 horas

102. **a)** -2 e 2

b) $-\frac{5}{2}, -2, 2$ e $\frac{5}{2}$

c) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

d) $\left]-\frac{5}{2}, -2\right[\cup \left]2, \frac{5}{2}\right[$

103. As funções das alíneas a), c), e) e f) definem funções cúbicas.

a) $a = 2$; $b = 0$; $c = -1$; $d = 1$

c) $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2}$; $d = 0$

e) $a = -4$; $b = 4$; $c = -1$; $d = 0$

f) $a = 8$; $b = -12$; $c = 6$; $d = -1$

104. **a)** 2 **b)** $0, -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ **c)** 0 e $\frac{1}{2}$

d) $-1, 2$ e 3 **e)** -1 **f)** -3

g) $-1, 0$ e $\frac{1}{2}$ **h)** 1 e 2

105. **a)** $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)(x - 1) =$

$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-2) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$

c) $f(x) = -2x^3$

106. **a)** $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-1)(x-3)$

b) $g(x) = (x+2)^2(x-1)$

c) $h(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

107. **a)** A função tem dois zeros que são números simétricos (a e $-a$) e, portanto, o gráfico de f tem de intersetar o eixo das abcissas em dois pontos simétricos em relação à origem do referencial.

b) Os zeros de g são $a - 1$, a e $a + 1$, portanto, sendo $A(a - 1, 0)$, $B(a, 0)$ e $C(a + 1, 0)$, tem de ser $\overline{AB} = \overline{BC}$.

c) A função h só tem um zero (a) e o gráfico apresentado é de uma função com dois zeros.

d) O único zero da função é a; ora, no gráfico apresentado, o zero da função é um número positivo, mas, então, o gráfico teria de começar por ter a concavidade voltada para baixo, pois a também é o coeficiente do termo de grau 3 do polinómio que define a função j.

108. **a)** $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$ **b)** $]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$

c) $]-2, +\infty[$ **d)** $[-1, 0] \cup [2, +\infty[$

e) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$ **f)** $[2, +\infty[\setminus \{3\}$

g) $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

109. $]-\infty, -1[\cup]2, 3[$

110. **a)** Os zeros são $-2, -1, \frac{1}{2}$ e 1;

$CS = [-2, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Os zeros são $-2, 0$ e 1; $CS = \{-2\} \cup [0, 1]$

c) Os zeros são -1 e 2; $CS =]-\infty, 2]$

111. **a)** $f(x) = \frac{1}{6}(x+2)x(x-2)(x-3)$

b) $g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$

c) $h(x) = -\frac{1}{9}(x+3)^3(x-1)$

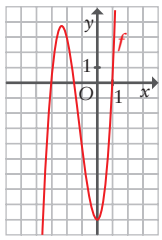
112. **a)** $a = 2$ e $b = 7$

b₁) $f(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+3)$

b₂)

x	$-\infty$	-3		$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x+3)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b₃)



b₄) $k \in]9, +\infty[$

113. **a)** $(0, 0)$, $(-1, 4)$ e $(2, 4)$

b) A área é 6 (unidades de área) e o perímetro é $3 + \sqrt{17} + \sqrt{20}$ (unidades de comprimento).

114. **a)** 1 (unidade de área)

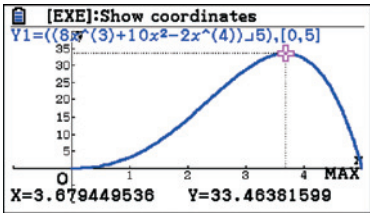
b) Os zeros de h são $-2, 4$ e 6 e os zeros de j são $-3, -2$ e 1.

c) $k \in]-3, -2[$

d) $\left(4, \frac{10}{3}\right)$

115. $a(x) = \frac{8x^3 + 10x^2 - 2x^4}{5}$, $D_a =]0, 5[$

A área atinge o máximo em 3,7.



116. $D'_f = \{1, 2, 6\}$

117. **a)** $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(\sqrt{4}) = 1$,

$g(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $g\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{5}$,

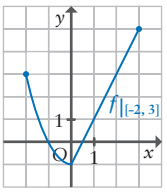
$g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2\pi$ e $g\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right) = -\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}$ é imagem de $\frac{4}{3}$, $\sqrt{3}$ é imagem de $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{1}{4}$ é imagem de $-\frac{1}{2}$.

118. **a)** $f(-\sqrt{2}) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$, $f(3) = 5$ e $f(a^2 + 2) = 2a^2 + 3$

b) $CS = \left\{-3, \frac{9}{2}\right\}$

c) $D' = [-1, 5]$



119. **a₁)** $\{-3, 1\}$ **a₂)** $[-4, -3[\cup]1, 3[$

b) Três

c) Qualquer intervalo contido em $[-4, 0]$, qualquer intervalo contido em $[0, 2]$ ou qualquer intervalo contido em $[2, 3[$.

d)

x	-4		0		2	3
g	Mín. -2	↗	Máx. 2	↘	Mín. -2	↗

e) $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)^2 - 2 & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$

120. 6 (unidades de área)

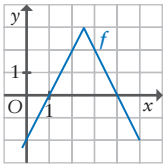
121. $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2|$ $g(x) = 2|x - 1| + 1$

$j(x) = -|x + 1| + 3$

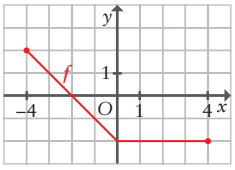
122. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{se } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 5 & \text{se } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$

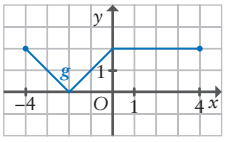
123. $f(x) = -2\left|x - \frac{5}{2}\right| + 3$



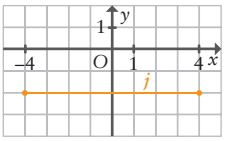
124. **a)**



b)

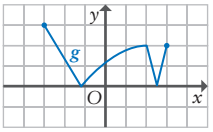


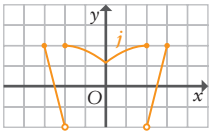
$g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } -4 \leqslant x < -2 \\ x + 2 & \text{se } -2 \leqslant x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$



$D_j = [-4, 4]$ e $j(x) = -2$

125.





126. **a)** $\{-2, 2\}$ **b)** $\{-3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

c) $\varnothing$ **d)** $\{-2, 2\}$

e) $\{-1, 2\}$ **f)** $\frac{1}{2}$

g) $\left\{-3, -\frac{1}{3}\right\}$ **h)** $\{-3, -1, 1, 3\}$

i) $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ **j)** $]-\infty, -4] \cup [8, +\infty[$

k) $\mathbb{R}$ **l)** $]-2, 2[$

m) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

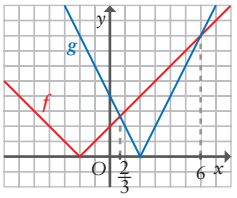
n) $[0, 3]$ **o)** $[-3, -1] \cup [1,3]$

p) $]-\infty, -6[\cup]-5, 0[\cup]1, +\infty[$

q) $\varnothing$ **r)** $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$

s) $]-\infty, 1[$ **t)** $\left]-6, \frac{4}{5}\right[$

127.

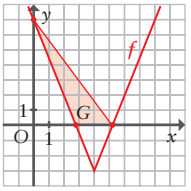


$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 6$;

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \wedge x < 6$

128. $a = -4 \wedge b = -8$ ou $a = 4 \wedge b = 8$

129. **a)** Área: 8,4 (unidades de área)

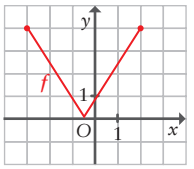


b) A função é decrescente em $]-\infty, 4]$ e é crescente em $[4, +\infty[$; atinge o minímo em 4.

c) $]-\infty, 5]$

130. As retas AB e CD são paralelas à reta de equação $y = x$ e as retas AD e BC são paralelas à reta de equação $y = -x$; portanto, as retas AB e CD são perpendiculares às retas AD e BC . Área: 8 (unidades de área)

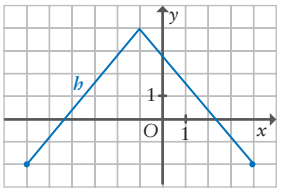
131. **a)**



b) $\forall x \in D_j, 0 \leqslant f(x) \leqslant 5$

c) 8 (unidades de área)

d₁)



d₂) A função h é crescente em $[-6, -1]$ e é decrescente em $[-1, 4]$; 3 é máximo de h e -2 é mínimo.

132. $f(x) = \sqrt{x - 2} - 1$ e $g(x) = \sqrt{4 - x} + 1$

133. $D_{h^{-1}} = [0, +\infty[$, $D'_{h^{-1}} =]-\infty, 0]$

e $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$D_{k^{-1}} = [0, +\infty[$, $D_{k^{-1}} =]-\infty, 0]$ e $k^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$D_{j^{-1}} = [1, +\infty[$, $D_{j^{-1}} =]-\infty, 4]$

e $j^{-1}(x) = 4 - (x - 1)^2$

$D_{t^{-1}} =]-\infty, 2[$, $D_{t^{-1}} = [1, +\infty[$

e $t^{-1}(x) = \sqrt{2 - x} + 1$

134. **a)** $\{-3\}$ **b)** $\{1\}$ **c)** $\varnothing$

d) $\{0, 1\}$ **e)** $\{-4\}$ **f)** $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

g) $\varnothing$ **h)** $[0, +\infty[$ **i)** $]-\infty, 2]$

j) $\varnothing$ **k)** $\{-1\}$ **l)** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

m) $[-1, 8]$ **n)** $]-\infty, 1]$ **o)** $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$

p) $[-1, 3]$ **q)** $]-1, 1]$ **r)** $[0, 1]$

135. **a)** $a = -4$ **b₁)** -3 **b₂)** $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

136. **a)** Por exemplo, $(h \circ j)(4) = 2$ e $(j \circ h)(4) = \sqrt{8}$

b) $CS = \{4\}$; os gráficos de h e j intersetam-se no ponto de abcissa 4.

137. **a)** $\begin{cases} a\sqrt{16} + b = 3 \\ a\sqrt{9} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 11 \end{cases}$

b) 20 251

138. **a)** 12 000 clientes **b)** 40 €

c) 10 € (50 € não faz sentido no contexto do problema)

d) A receita obtida com a venda do jogo MatA é dada por $p\sqrt{180 - 3{,}6p}$; tem como valor máximo 258 199 (valor em euros, arredondado às unidades). A receita obtida com a venda do jogo MatB é dada por $p(15 - 0{,}3p)$; tem como valor máximo 187 500 (valor em euros). De acordo com os modelos apresentados, o jogo que pode dar maior receita é o MatA.

139. $(-1, -2)$ e $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

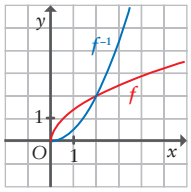
140. **a)** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

b) $f^{-1}: [-1, +\infty[\to \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ tal que

$f^{-1}(x) = \frac{5-(x+1)^2}{2}$

141. **a)** $D_f =]3, +\infty[$ **b)** 6

142. **a)** $D_{f^{-1}} = [0, +\infty[$,
$D'_{f^{-1}} = [0, +\infty[$
e $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}$



b₁) $P(x, \sqrt{2x})$

$d(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x})^2} =$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x} = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$

b₂) $(1, \sqrt{2})$ e $(3, \sqrt{6})$

b₃) $(2, 2)$

143. **a)** -1 e 11

b) 66 e -2

c) $B(0, -3)$, $A(x, \sqrt{x-2} - 3)$,

$d(A, C) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x-2} - 4)^2}$ e

$d(A, B) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x-2})^2}$

$d(A, C) = d(A, B) \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{x-2} - 4)^2 =$
$= x^2 + (\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow x - 2 - 8\sqrt{x-2} + 16 =$
$= x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6$

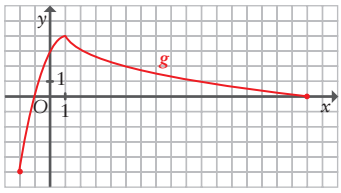
O ponto A tem coordenadas:

$(6, \sqrt{6-2} - 3) = (6, -1)$

Então, $d(A, C) = d(A, B) = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ e, dado que, $d(B, C) = 4$, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é $4 + 2 \times 2\sqrt{10} = 4 + 4\sqrt{10}$.

144. **a)** -1 e 17 **b)** $]-1, 17[$

c)

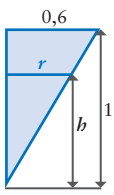


d) g é crescente em $[-2, 1]$ e é decrescente em $[1, 17]$; -5 e 0 são mínimos e 4 é máximo.

145. **a)** $\{-5\}$ **b)** $\{14\}$ **c)** $\{-7, 4\}$
d) $\{-1, 2\}$ **e)** $\{-1, 0\}$ **f)** $\{-1, 0\}$
g) $[2, +\infty[$ **h)** $]-4, 4[$ **i)** $]-2, +\infty[$

146. **a)** $0{,}12\pi \text{ m}^3$

b)



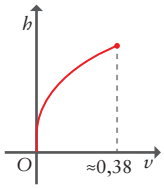
Recorrendo à semelhança de triângulos, tem-se $r = 0{,}6h$ e, portanto:

$v(h) = \frac{1}{3} \times \pi \times (0{,}6h)^2 \times h =$

$= \frac{0{,}36}{3} \times \pi \times h^2 \times h = 0{,}12\pi h^3$

c) 50 cm

d) $D_h = [0; 0{,}12\pi]$ e $h(v) = \sqrt[3]{\frac{v}{0{,}12\pi}}$



147. **a)** $f(0) = 1$; os zeros são -7 e $\frac{1}{2}$.

b) $\left]-7, \frac{1}{2}\right[$

148. **a₁)** 1 **a₂)** -3 **a₃)** 0
b₁) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **b₂)** $\{1, 3, 5\}$ **b₃)** $\{3, 4, 5\}$
c) $\{2, 4\}$

149. **a₁)** 0 **a₂)** -4 **a₃)** $\sqrt{2} - 5$
b₁) $[1, 3[\cup]3, +\infty[$ **b₂)** $[1, 5[\cup]5, +\infty[$
b₃) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

150. **a₁)** 4 **a₂)** $-\frac{1}{2}$

b₁) $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ **b₂)** $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ **b₃)** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) Dado que $4 \in D_{f \times g}$, só temos que confirmar que $(f \times g)(4) = -4$; com efeito, $(f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = -1 \times 4 = -4$.

d) -1

e) 0 e 3

f) -1 e 3

g) $]-\infty, 0] \cup \{3\}$

h) As duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$.

i) $D_{f \times g} = \mathbb{R}$ e $(f \times g)(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

151. **a)** A soma de duas funções afins pode ter um zero, pode não ter zeros ou pode ter uma infinidade de zeros, consoante a soma seja uma função polinomial de grau 1, constante, não nula, ou a função nula.

Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -4x + 2$ a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = -2x + 3$, que tem um zero.
- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x + 2$ a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = 3$, e não tem zeros.
- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$ a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = 0$, e tem uma infinidade de zeros.

b) A soma de uma função quadrática com uma função afim é sempre uma função quadrática e, portanto, pode não ter zeros, ter um zero ou ter dois zeros, como se apresenta nos exemplos seguintes.

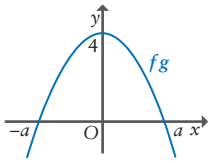
Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$, e não tem zeros.
- Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 + 1$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1$, e tem um zero.
- Se $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 + x - 1$, a função $f + g$ é definida por $(f + g)(x) = x^2 + 4x$, e tem dois zeros.

152. **a)** A função $f + g$ não tem zeros. As retas r e s têm declives simétricos e a mesma ordenada na origem e, portanto, $(f + g)(x) = 2b$, com $b \neq 0$.
A função $f - g$ toma o valor zero na abcissa do ponto em que os gráficos das funções se intersetam pois:
$(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
Neste caso, como os gráficos se intersetam no ponto $(0, b)$, conclui-se que 0 é o zero de $f - g$.
A função $f \times g$ tem dois zeros: a e $-a$.
$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$
O zero da função $\left(\frac{f}{g}\right)$ é o zero de f.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge$
$\wedge\ g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = a$

b) Como f e g são funções polinomiais de grau 1, a função $f \times g$ é uma função quadrática. O seu gráfico é uma parábola que interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas a e $-a$. Como as retas r e s têm declives de sinais contrários, a parábola que é o gráfico de $f \times g$ tem a concavidade voltada para baixo. Este pode ser a representação gráfica de $f \times g$.



153. **a)** $D_f =]-\infty, 6]$ e $D_g = [2, +\infty[$
b) $D_g = [2, 6]$; 2 é o único zero

154. **a₁)** -1 **a₂)** -3 **a₃)** -2 **a₄)** 1
b₁) $[-3, 3] \setminus \{-1, 1\}$ **b₂)** $[-3, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right]$
b₃) $[-1, 1]$

c) $D_{f+g} = [-3, 3]$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{se } -3 \leqslant x < 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ -x^2 + 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

155. **a)** $D_{f+g} = \mathbb{R}$ e $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $f - g$ tem três zeros; $\frac{f}{g}$ não tem zeros

c) $CS = \mathbb{R}$

Tema 5 Estatística

1. Características amostrais

Págs. 129 a 136

1. **a)** $\sum_{k=1}^{6} k^3$

b) $\sum_{j=5}^{7} \frac{13}{j}$

c) $\sum_{i=10}^{13} \sqrt{i}$

2. **a)** 30

b) 34

c) 165

d) 112

e) 42

3. **a)** V

b) F

c) V

d) V

4. **a)** $\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{50} (10j) - 7\sum_{j=1}^{50} j\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{50} (10j) - \sum_{j=1}^{50} 7j\right) =$

$= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{50} (3j) = \frac{1}{3} \times 3 \times \sum_{j=1}^{50} j = \sum_{j=1}^{50} j$

b) $\sum_{k=1}^{60} (k-2)^2 + 4\sum_{k=1}^{60} k =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4) + \sum_{k=1}^{60} (4k) =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4 + 4k) =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 + 4) = \sum_{k=1}^{60} k^2 + \sum_{k=1}^{60} 4 =$

$= \sum_{k=1}^{60} k^2 + 60 \times 4 = 240 + \sum_{k=1}^{60} k^2$

c) $\sum_{p=1}^{70} \frac{(p+4)^2}{6} - \sum_{p=1}^{70} \frac{(p-4)^2}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{(p+4)^2 - (p-4)^2}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{p^2 + 8p + 16 - p^2 + 8p - 16}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{16p}{6} = \frac{8}{3}\sum_{p=1}^{70} p$

d) $\sum_{n=1}^{80} (3^{n+1} - 2^{n+2}) - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} 3^{n+1} - \sum_{n=1}^{80} 2^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} (3 \times 3^n) - \sum_{n=1}^{80} (4 \times 2^n) - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n +$

$+ 3\sum_{n=1}^{80} 2^n = 3\sum_{n=1}^{80} 3^n - 4\sum_{n=1}^{80} 2^n -$

$- 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n = \sum_{n=1}^{80} 3^n - \sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} (3^n - 2^n)$

5. **a)** 13

b) $\frac{1}{4}$

6. Média = 1,6 horas; o Pedro não cumpriu as recomendações da mãe.

7. **a)** 10,2 km

b) 204 km

8. **a)** 1,89 m

b) 1,86 m

9. **a)** 27 dias

b) 270 páginas

c) 10 páginas

10. 9,5 segundos

11. **a)** 15,2 °C

b) 59 °F

12. **a)** 8,03 m

b)

x_i	d_i
8,02	–0,01
7,92	–0,11
8,11	0,08
8,03	0
7,95	–0,08
8,06	0,03
7,97	–0,06
8,08	0,05
8,11	0,08
8,03	0
7,99	–0,04
8,09	0,06

13. **a)** –0,1 litros

b) 6,3 litros

c) 63 litros

14. **a)** 20 000 000

b) $1{,}15^2 \times 20\,000\,000 = 26\,450\,000$

15. **a)** 15

b) 1,69

16. **a)** 200

b) 1,6

c) 0,4

17.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - y_i^2)}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} =$$

$$= \frac{SS_x + n\,\bar{x}^2 - SS_y - n\,\bar{y}^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = \frac{n\,\bar{x}^2 - n\,\bar{y}^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} =$$

$$= \frac{n\,(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = n$$

18. **a)** $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{16}$

19. **a)** 25%

b) 4%

20. **a)** 36

b) 16

c) 9

d) 6

e) 24

21. **a)** 3

b) 15

22. Tem-se $1 = 11{,}4 - 8 \times 1{,}3$

A proporção de alunos cujas classificações não pertencem ao intervalo $[\bar{x} - 8\,s_x\,,\,\bar{x} + 8\,s_x]$ é inferior a $\frac{1}{64}$.

Portanto, o número de alunos com classificação inferior a 1 é menor do que $\frac{120}{64}$.

Como $\frac{120}{64} = 1{,}875$, houve, no máximo, um aluno com classificação inferior a 1.

23. **a)** 14

b) 20

c) 37

24. Primeiro quartil = $P_{25} \approx 9{,}568$

$P_{95} \approx 11{,}176$

Interpretação:

- aproximadamente 25% dos jogadores percorreram uma distância inferior ou igual a 9568 metros;
- aproximadamente 95% dos jogadores percorreram uma distância inferior ou igual a 11 176 metros.

LeYa
www.leya.com
Texto
www.texto.pt
ISBN 978-972-47-5306-5
9 789724 753065
IVA INCLUÍDO 6%
€ 8,25

acordo ortográfico

LeYa EDUCAÇÃO
www.leyaeducacao.com