Respostas

Tema 1 Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria dos Conjuntos

1. Proposições

Págs. 4 a 12

1. «O rio Douro nasce na serra da Estrela.»
«O menor número primo é par.»

2. **a)** F **b)** F **c)** V **d)** F **e)** F **f)** F
g) V **h)** F **i)** V **j)** V

3. Os valores lógicos de p, q, r e s são respetivamente V, F, F e V.
a) F **b)** V **c)** V

4. V

5. «D. Dinis não foi o primeiro rei de Portugal.»

6. Todas, exceto «O telemóvel da Inês não é de marca diferente do telemóvel da Catarina.»

7. **a)** V **b)** F

8. **a)** V
b) «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 90º.»

9. Os valores lógicos de p e de q são diferentes.
a) V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F

10. **a)** «A Filipa é filha da Joana.» e
«A Filipa é filha do Marco.»
b) «18 é múltiplo de 3.» e
«18 é múltiplo de 6.»
c) «$1 < 2$» e «$2 < 3$»

11. **a)** «A Teresa tem dois irmãos.» e
«A Teresa tem três irmãos.»
b) «$\frac{9}{4} < 2{,}5$» e «$\frac{9}{4} = 2{,}5$»
c) «A minha filha Margarida vai comigo ao cinema esta tarde.» e
«O meu filho Pedro vai comigo ao cinema esta tarde.»

12. **a)** «Não vou comer uma laranja.»
b) «Vou comer uma laranja e uma maçã.»
c) «Vou comer uma laranja, mas não vou comer uma maçã.»
d) «Não vou comer uma laranja, nem uma maçã.»
e) «Vou comer uma laranja ou uma maçã.»
f) «Vou comer uma laranja ou uma maçã, mas não as duas frutas simultaneamente.»

13. **a₁)** $\sim p$ **a₂)** $q \wedge r$ **a₃)** $q \vee r$
a₄) $p \wedge r$ **a₅)** $\sim p \wedge q$ **a₆)** $r \wedge \sim q$
a₇) $\sim q \wedge \sim r$

b₁) «2 ou 3 pertence ao conjunto A.»
b₂) «2 não pertence ao conjunto A e 3 não pertence ao conjunto B.»

14. O valor lógico de $\sim a$ é V e o de $\sim b$ é V; assim, o valor lógico de a é F e o de b é F.
a) F **b)** V

15. **a)** V **b)** V **c)** F

16. **a₁)**
$$\begin{aligned} &\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow && (1)\\ &\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim q) \Leftrightarrow && (2)\\ &\Leftrightarrow p \wedge v \Leftrightarrow && (3)\\ &\Leftrightarrow p \end{aligned}$$
(1) Dupla negação
(2) Princípio do terceiro excluído
(3) Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição

a₂)
$$\begin{aligned} &\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow && (1)\\ &\Leftrightarrow \sim p \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow && (2)\\ &\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow && (3)\\ &\Leftrightarrow f \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow && (4)\\ &\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow && (5)\\ &\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \end{aligned}$$
(1) 1.as leis de De Morgan
(2) Distributiva da conjunção relativamente à disjunção
(3) Princípio da não contradição
(4) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(5) 1.as leis de De Morgan

a₃)
$$\begin{aligned} &[(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow && (1)\\ &\Leftrightarrow (v \wedge q) \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow && (2)\\ &\Leftrightarrow q \wedge [\sim(\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow && (3)\\ &\Leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow && (4)\\ &\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow && (5)\\ &\Leftrightarrow (q \wedge p) \vee f \Leftrightarrow && (6)\\ &\Leftrightarrow q \wedge p \Leftrightarrow && (7)\\ &\Leftrightarrow p \wedge q \end{aligned}$$
(1) Princípio do terceiro excluído
(2) Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição
(3) 1.as leis de De Morgan
(4) Distributiva da conjunção relativamente à disjunção
(5) Princípio da não contradição
(6) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(7) Comutatividade da conjunção

a₄)
$$\begin{aligned} &p \vee [q \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow && (1)\\ &\Leftrightarrow p \vee [(f \vee q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow && (2)\\ &\Leftrightarrow p \vee [(f \wedge p) \vee q] \Leftrightarrow && (3)\\ &\Leftrightarrow p \vee (f \vee q) \Leftrightarrow && (4)\\ &\Leftrightarrow p \vee q \end{aligned}$$
(1) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(2) Distributiva da disjunção relativamente à conjunção
(3) Conjunção de uma proposição falsa com outra proposição
(4) Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição

b₁)

p	q	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim q$	$q \vee \sim q$	$\sim(\sim p) \wedge (q \vee \sim q)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F

b₂)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	V

b₃)

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$(p \vee \sim p) \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$p \wedge q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F

$[(p \vee \sim p) \wedge q] \wedge [\sim(\sim p \wedge q)]$
V
F
F
F

b₄)

p	q	$p \vee q$	$q \wedge (p \vee q)$	$p \vee [q \wedge (p \vee q)]$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	F

17. **a)** F **b)** V **c)** q

18. **a)** $p \wedge [q \vee \sim(p \vee q)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p \wedge q$; V
Então, as proposições p e q são ambas verdadeiras, pelo que o valor lógico da proposição é verdade.

19. $(p \vee q) \wedge \sim[(q \wedge r) \vee \sim r] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \wedge r)$
Conclui-se que apenas a proposição q é falsa e que saiu 4 no lançamento do dado.

20. **a)** p: «O Joaquim come a sopa.»
q: «A mãe do Joaquim dá-lhe um doce.»
$p \Rightarrow q$
b) p: «Não falto aos treinos.»
q: «Sou chamado para a equipa da escola.»
$p \Rightarrow q$
c) p: «Vês Braga por um canudo.»
q: «Vais ao Santuário do Bom Jesus do Monte.»
$p \Rightarrow q$

21. **a)** V **b)** F **c)** V

22. **a)** p é falsa, q é falsa e r é verdadeira.
b) p é verdadeira, q é falsa e r é falsa.

23. **a)** V **b)** V **c)** V **d)** V

24. Como a implicação é verdadeira, temos três casos possíveis:
- $p \vee q$ é verdadeira e $p \wedge q$ é verdadeira; e, daí, p e q são ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é verdadeira; temos novamente p e q ambas verdadeiras, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.
- $p \vee q$ é falsa e $p \wedge q$ é falsa; como $p \vee q$ é falsa, p e q são ambas falsas, e $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

25. **a)** V **b)** V

26. $\sim(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge r \wedge \sim q$

27. **a$_1$)** «Se esta tarde estudar Matemática, então à noite vou ver televisão e jogar no computador.»

a$_2$) «Se esta tarde estudar Matemática e esta noite não jogar no computador, então esta noite vou ver televisão.»

a$_3$) «Esta noite vou ver televisão se e só se não jogar no computador.»

b$_1$) $p \Rightarrow q \vee r$

b$_2$) $\sim p \Rightarrow \sim q \wedge \sim r$

c$_1$) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
«Esta tarde vou estudar Matemática, mas à noite não vou ver televisão.»

c$_2$) $\sim(q \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow q \wedge r$
«Esta noite vou ver televisão e vou jogar no computador.»

28. $(p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim r)$ é verdadeira
$\Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ logo $q \Rightarrow \sim r$ é verdadeira

29. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge$
$\wedge (\sim q \Rightarrow r) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge$
$\wedge (r \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r)$
$\Rightarrow (r \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow r)$
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (r \Leftrightarrow \sim p)$ logo $r \Leftrightarrow \sim p$ é verdadeira

(1) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p)$
e $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$

30. A., D. e E.

2. Condições e conjuntos

Págs. 13 a 26

31. A., B. e D.

32. **a)** V **b)** F

33. **a)** Para $x = 2$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

b) Para $x = 0$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 1$ resulta uma proposição falsa.

c) Para $x = 3$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

d) Para $x = 2$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

e) Para $x = 0$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = -1$ resulta uma proposição falsa.

f) Para $x = -4$ resulta uma proposição verdadeira;
para $x = 0$ resulta uma proposição falsa.

34. **a)** 3 **b)** 1 e 2 **c)** 2 e 3 **d)** 1, 2 e 3

35. **a)** É. **b)** Não é. **c)** Não é. **d)** Não é.
e) É. **f)** Não é.

36. V

37. $x \leqslant -1$

38. $p(n) \wedge q(n)$

39. **a)** $-3 \leqslant x \wedge x < 0$
b) $-3 > x \vee x \geqslant 0$

40. **a)** $x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0$
b) $x - 3 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0$

41. $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$-3x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3}$

a) 1, por exemplo. **b)** 0, por exemplo.
c) 0, por exemplo. **d)** -2
e) 0, por exemplo. **f)** 1, por exemplo.
g) 0, por exemplo. **h)** -1, por exemplo.

42. **a)** $x > -5 \wedge -x > -5$
b) $x = 10 \vee x + 1 = 10$
c) $x \leqslant 0 \wedge x^3 \leqslant 0$

43. **a)** $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$; V
b) $x|x| < 0 \Leftrightarrow x < 0$; V
c) $x < 3 \Rightarrow x \leqslant 3$; V
d) $x \neq 6 \Leftrightarrow x^2 \neq 36$; F

44. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V

45. **a)** $\exists k \in \mathbb{Z} : -5 < k < -3$; V
b) $\exists k \in \mathbb{Z} : k = k^3$; V
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x < \dfrac{1}{x}$; V
d) $\exists n \in \mathbb{N}$: a soma de n e $n + 1$ é um número par ; F

46. $p(n)$ é impossível em $\mathbb{N}$.
$q(n)$ é impossível em $\mathbb{N}$.
$r(n)$ é possível em $\mathbb{N}$.

47. $p(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.
$q(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.
$r(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.
$s(x)$ é possível em $\mathbb{R}$.

48. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

49. **a)** A condição é universal em $\mathbb{N}$.
b) A condição não é universal em $\mathbb{N}$.
c) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
d) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
e) A condição é universal em $\mathbb{N}$.
f) A condição não é universal em $\mathbb{N}$.

50. **a)** $\forall x \in \mathbb{R}, x \times (-x) < 0$; F
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x$; F
c) $\forall n \in \mathbb{N}$, a soma de n, $n + 1$ e $n + 2$ é múltiplo de 3 ; V
d) $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\dfrac{\text{m.d.c.}\,(n, n+1) + \text{m.m.c.}\,(n, n+1)}{2} \notin \mathbb{N}$;
V

51. **a)** A condição é impossível em $\mathbb{R}$.
b) A condição é universal em $\mathbb{R}$.
c) A condição é possível não universal em $\mathbb{R}$.
d) A condição é possível não universal em $\mathbb{N}$.
e) A condição é universal em $\mathbb{N}$.

52. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F

53. Por exemplo:
a) $[2, +\infty[$
b) $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$
c) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

54. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** V

55. $a = 3$; $b = 3 \vee b = \dfrac{1}{3}$

56. A proposição afirma que uma condição universal num domínio é possível nesse domínio, o que é verdade.

57. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0$

58. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geqslant 5$

59. **a)** $\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 > 2x$; V
b) $\forall x \in \mathbb{Z}, 3x + 7 \neq 3$; V
c) $\exists n \in \mathbb{N} : 6n + 3$ é par ; F
d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$; F

60. **a)** «Há seres humanos que não sabem nadar.»; V
b) «Nenhum número natural é múltiplo de 3.» ou «Todos os números naturais não são múltiplos de 3.»; F
c) «Os números inteiros são todos menores ou iguais a 0 ou maiores ou iguais a 1.»; V
d) «Há números reais que são irracionais.»; V

61. **a)** $x = 0$, pois $|0| = 0$ e não é um número positivo.
b) $x = -1$, pois -3 não é menor ou igual a -5.
c) $n = 15$, $15 \in]1, 19[$, 15 é ímpar, 15 não é quadrado perfeito, mas 15 não é primo.
d) $x = -1$, $(-1 + 1)^4 > (-1)^4 \Leftrightarrow 0 > 1$, que é uma proposição falsa.

62. **a)** $\{-1, 0, 1\}$
b) $\{-4, -3, 0, 4\}$
c) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

63. **a)** $\{2, 3, 4\}$
b) $\{2, 3, 5\}$
c) $\{2, 3, 4, 6\}$
d) $\{2, 3, 4\}$

64. **a)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} : n$ é múltiplo de $7 \wedge n < 30\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : n < 17 \wedge n$ não é primo$\}$

65. $\{-3, 0, 3, 6\}$

66. $[-10, 12[$

67. **a)** $\{2\}$ **b)** $\{5, 9, 13\}$

c) $\{2, 5, 8\}$ **d)** $\varnothing$

e) $\{2, 5, 7\}$ **f)** $\varnothing$

g) $[3, 5]$ **h)** $]2, 5]$

i) $\{6\}$ **j)** $\varnothing$

k) $\mathbb{N}$ **l)** $\varnothing$

68. Seja $x \in A \cap C$, então $x \in A \wedge x \in C$.
$x \in A \Rightarrow x \in B$, pois $A \subset B$.
$x \in C \Rightarrow x \in D$, pois $C \subset D$.
Como $x \in B \wedge x \in D$, $x \in B \cap D$, logo $A \cap C \subset B \cap D$.

69. **a)** $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 16\}$

b) $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $[2, 9]$ **d)** $]1, 8]$

e) $[-2, 7]$ **f)** $]5, 15]$

g) $\mathbb{Z}$ **h)** $\mathbb{Z}$

70. Por exemplo: $C = \{1, 13, 21\}$.

71. $A \cup B = B$ é necessariamente falsa.
$B \cap C = \varnothing$ é necessariamente verdadeira.

72. **a)** $\{2, 6, 7\}$ **b)** $\varnothing$

c) $\{2, 3, 5, 7\}$ **d)** $\{1, 6, 11, 16\}$

e) $\varnothing$ **f)** $\{1, 4, 5, 9\}$

g) $[4, 6[$ **h)** $]0, 5[$

i) $[18, +\infty[$ **j)** $]-\infty, 4[$

73. $\{1, 4\}$

74. **a)** $]10, 12]$

b) $[2, 5]$

c) $\{2, 12\}$

75. **a)** $]3, 8[$ **b)** $]3, 12]$

c) $[-1, 8[$ **d)** $[-3, +\infty[$

e) $[-3, 12]$ **f)** $]-\infty, -3[\cup [8, +\infty[$

g) $]-\infty, -3]$ **h)** $[8, +\infty[$

i) $]12, +\infty[$

76. **a_1)** $]4, +\infty[$ **a_2)** $\mathbb{R}$

a_3) $\varnothing$ **a_4)** $\varnothing$

a_5) $]4, +\infty[$ **a_6)** $]4, +\infty[$

a_7) $\mathbb{R}$ **a_8)** $]-\infty, 4]$

a_9) $]4, +\infty[$

b_1) Possível não universal.

b_2) Universal.

b_3) Impossível.

b_4) Impossível.

b_5) Possível não universal.

b_6) Universal.

b_7) Universal.

77. **a)** $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} = \{-2, -1, 1, 3\}$

b) $\{-2, -1, 1, 3\} \cup \varnothing = \{-2, -1, 1, 3\}$

c) $\{-2, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} = \{-2, -1\}$

78. **a)** $\sim p(a) \Rightarrow q(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(a) \vee q(a)$ é verdadeira; como a verifica $p(x) \vee q(x)$, conclui-se que $a \in P \cup Q$.

b) $\sim[\sim q(b) \Rightarrow p(b)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim q(b) \wedge \sim p(b)$ é verdadeira; então $b \notin P \cap b \notin Q$, logo $b \notin P \cap Q$, isto é, $b \in \overline{P \cap Q} \Leftrightarrow b \in \overline{P} \cup \overline{Q}$.

79. Queremos provar que:

$$t \text{ interseta } r \Rightarrow t \text{ interseta } s$$

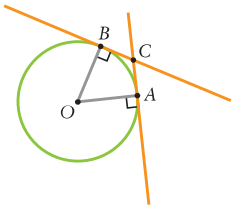
utilizando o método de demonstração por contrarrecíproco.
Para isso, basta provar que:

$$t \text{ é paralela a } s \Rightarrow t \text{ é paralela a } r$$

Assim, como t é paralela a s e s é paralela a r (por hipótese), conclui-se (transitividade) que t é paralela a r.

80. Vamos demonstrar a equivalência por dupla implicação:

$[OACB]$ é um losango $\Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ \wedge$
$\wedge\ A\hat{O}B = 90^\circ \Rightarrow [OACB]$ é um losango



Provemos a 1.ª implicação:
$O\hat{B}C = O\hat{A}C = 90^\circ$ (as retas tangentes à circunferência são perpendiculares aos raios nos pontos de tangência). Como $[OACB]$ é losango, $A\hat{O}B = A\hat{C}B$ e:

$$O\hat{B}C + O\hat{A}C + A\hat{O}B + A\hat{C}B = 360^\circ$$

$$90^\circ + 90^\circ + 2A\hat{O}B = 360^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ$$

Provemos a 2.ª implicação:
Como $A\hat{O}B = 90^\circ$:

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + A\hat{C}B = 360^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\hat{C}B = 90^\circ$$

Assim, $[OACB]$ tem os quatro ângulos iguais, isto é, é um retângulo. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios de uma circunferência), conclui-se que $[OACB]$ é um quadrado e, consequentemente, é um losango.

81. Vamos supor que a soma de um número racional com um número irracional é um numero racional.

a e b designam números racionais

x designa um número irracional

$a + x = b$ (1)

a, por ser racional, pode ser escrito na forma de um quociente entre dois números inteiros; assim $a = \frac{n}{m}$, onde n e m designam números inteiros, com $m \neq 0$.

O mesmo acontece com b; $b = \frac{p}{q}$, onde p e q designam números inteiros, com $q \neq 0$.

Substituindo a e b em (1) resulta:

$$\frac{n}{m} + x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{q} - \frac{n}{m} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{mp - nq}{mq}$$

Os números mp, nq e mq são inteiros, pois o produto de dois números inteiros é um número inteiro.
Sendo assim, x é um número racional, pois é o quociente de dois números inteiros.
Esta contradição resulta do facto de termos suposto que a soma de um número racional com um número irracional era um número racional.
Logo, a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Tema 2 Álgebra

1. Radicais e potências de expoente racional

Págs. 28 a 34

1. **a)** V **b)** F **c)** F

2. **a)** V **b)** F

3. **a)** Verdade, pois $2n - 1$ designa um número ímpar, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$.

b) Falso; por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^2$ é maior do que $(-2)^2$.

c) Falso; por exemplo, -3 é menor do que -2 e $(-3)^3$ é menor do que $(-2)^3$.

d) Verdade, pois $2n$ designa um número par, -3 e -2 são números negativos, -3 é menor do que -2 e sabemos que, sendo k um número par, se tem $a < b < 0 \Rightarrow a^k > b^k$.

e) Verdade, pois $x \in]-\infty, -2[\Leftrightarrow x < -2$ e 13 é um número ímpar, e sabemos que, sendo k um número ímpar, se tem $a < b \Rightarrow a^k < b^k$.

f) Verdade, pois, dado que x é menor do que -2, tem-se $x < -2 < 0$ e, como 8 é um número par, sabemos que $x^8 > (-2)^8$, condição esta que é equivalente a $x^8 > 2^8$.

g) Falso. Seja, por exemplo, $x = -3$; tem-se $-3 \in]-\infty, -2[$, $(-3 + 1)^5 = -32$ e $(-3)^5 = -243$ e, portanto, $(x + 1)^5 > (-3)^5$.

4. Seja $a \in]0, 1[$; então, dado que $0 < a < 1$, tem-se $0 < a^n < 1^n$ e, portanto, $a^n < 1$.

5. **a)** 2 **b)** 8 **c)** -2

6. $\frac{1}{2}$

7. As soluções são:

a) $\sqrt[5]{10}$ **b)** $\sqrt[3]{-2}$ **c)** $\sqrt[9]{3}$ **d)** $\sqrt[4]{8}$

8. 2

9. **a)** 4 **b)** 12 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 120 **f)** 15

10. **a)** 4 **b)** 10 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 8 **f)** 3

11. **a)** 4 **b)** 5 **c)** 21

12. **a)** $\sqrt[3]{40}$ **b)** $\sqrt[3]{27a}$ **c)** $\sqrt{50}$ **d)** $\sqrt{3a^2}$ **e)** $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$

13. **a)** $7\sqrt[3]{3}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $5\sqrt{6}$ **e)** $2\sqrt{3}$ **f)** $2\sqrt{2}$ **g)** $2\sqrt[5]{4}$ **h)** $3a^2b^3\sqrt{2a^2b}$ **i)** $3|a|\sqrt{3}\sqrt{3a^2}$ **j)** $2|x|\sqrt[4]{2}$

14. **a)** $5\sqrt{3}$ **b)** $5\sqrt[3]{x}$ **c)** $20\sqrt{2}$ **d)** $6\sqrt{3}$ **e)** $a\sqrt[3]{a}$ **f)** $4ab\sqrt{2ab}$

15. **a)** $3\sqrt[24]{5}$ **b)** $\sqrt[12]{12}$ **c)** $\sqrt[6]{20}$

16. **a)** $\sqrt[12]{3^4}$ **b)** $\sqrt[12]{2^6}$ **c)** $\sqrt[12]{5^3}$ **d)** $\sqrt[12]{10^2}$ **e)** $\sqrt[12]{a^8}$

17. **a)** $\sqrt[3]{3}$ **b)** $\sqrt[3]{5}$ **c)** $\sqrt[3]{3^2}$ **d)** $\sqrt[3]{a^2b}$ **e)** $\sqrt[3]{2}$

18. **a)** $\sqrt[6]{5^2}$ e $\sqrt[6]{2}$ **b)** $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[4]{5^2}$ **c)** $\sqrt[6]{4^2}$ e $\sqrt[6]{3^3}$ **d)** $\sqrt[12]{3^2}$ e $\sqrt[12]{2^3}$

19. **a)** $\sqrt[3]{3}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt[7]{16}$ **d)** $2+7\sqrt{6}$ **e)** 2 **f)** $5-2\sqrt{6}$ **g)** $\sqrt{3}$ **h)** 189

20. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(\sqrt{c})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{c}{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt[3]{c} = b$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt[3]{c})^3} = \frac{\sqrt[3]{c^3}}{c} = \sqrt{\frac{c^3}{c^2}} = \sqrt{c} = a$

21. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt[6]{108}}{3}$ **d)** $3\sqrt[3]{25}$ **e)** $\frac{\sqrt{10}-2}{6}$ **f)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **g)** $2+\sqrt{3}$ **h)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ **i)** $\frac{3\sqrt{11}+3\sqrt{3}}{2}$ **j)** $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{3}$

22. **a)** $3+2\sqrt{3}$ **b)** $3+4\sqrt{2}+\sqrt{6}$

23. **a)** $\sqrt[7]{3^4}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt[9]{2^5}$ **d)** $\sqrt[3]{4^{-1}}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

24. **a)** $\sqrt{25}=5$ **b)** $\sqrt[3]{8}=2$ **c)** $\sqrt{4^3}=8$ **d)** $\sqrt[3]{27}=3$ **e)** $\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

25. **a)** $2^{\frac{1}{2}}$ **b)** $2^{\frac{2}{3}}$ **c)** $2^{\frac{3}{5}}$ **d)** $2^{-\frac{5}{4}}$ **e)** $2^{-\frac{14}{3}}$

26. **a)** $\sqrt{10}$ **b)** $6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{36}$ **c)** $6^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{6^4}$ **d)** $\sqrt[8]{27}$ **e)** $\sqrt[8]{5^3}$

27. $a^{\frac{1}{4}}$ **28.** $\sqrt[9]{a^5}$

29. $8+4\sqrt{2}$ **30.** $4\sqrt{6}\,\pi$

31. **a)** $3\sqrt{3}$

b) $\begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = 3\sqrt{3} \\ v_2 - v_1 = 13\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}\,v_1 \\ v_2 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ 3\sqrt{3}v_1 = 13\pi + v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi}{3\sqrt{3}-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{13\pi(3\sqrt{3}+1)}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3\sqrt{3}v_1 \\ v_1 = \frac{\pi(3\sqrt{3}+1)}{2} \end{cases}$

Dado que $\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}$, sendo a a aresta do cubo, tem-se $\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8} = \frac{\pi(3\sqrt{3}+1)}{2}$ e, portanto, $a^3 = 3(3\sqrt{3}+1) = 9\sqrt{3}+3$ e, finalmente, $a = \sqrt[3]{9\sqrt{3}+3}$.

32. **a)** Seja a a aresta do cubo truncado. Tem-se $a^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}-1$

b) $\frac{7\sqrt{2}-7}{3}$

33. **a)** Todas são hipotenusas de triângulos retângulos iguais.

b) $\sqrt{18\sqrt{3}-30}$

2. Polinómios

Págs. 35 a 44

34. **a)** Grau: 4

Termos: $-\sqrt{3}\,x^4, 3x^3, 0x^3, -\frac{4}{3}x, -\pi$

Coeficientes: $-\sqrt{3}, 3, 0, -\frac{4}{3}, -\pi$

b) Grau: 9

Termos:

$\frac{t^9}{6}, 0t^8, 0t^7, 0t^6, t^5, 0t^4, 0t^3, -\sqrt{2}\,t^2, 0t, 10^{20}$

Coeficientes:

$\frac{1}{6}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -\sqrt{2}, 0, 10^{20}$

c) Grau: 0

Único termo: 10

Único coeficiente: 10

35. **a)** $7x^3$ **b)** $-3y^2$ **c)** $\frac{16a^4}{5}$ **d)** $\frac{-5b^7}{6}$

36. **a)** $x^5 - 6x^4 + 8x^3 + x^2 - 6$

b) $-5c^6 + \frac{2}{9}c^5 - 0{,}1c^4$

37. **a)** São iguais.

b) Não são iguais.

38. **a)** $2x^2 - 5x + 1$

b) $2x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 3x - \frac{25}{18}$

39. **a)** $6x - 8$

b) $-6x^3 + 15x^2 + 27x$

c) $20y^3 + 2y^2 - 82y + 56$

40. $P(x) \times Q(x)$ tem grau 7

$P(x) + Q(x)$ tem grau 4

$Q(x) - R(x)$ tem grau 3

$P(x) \times R(x) + Q(x)$ tem grau 7

$Q(x) + R(x)$ tem grau 2

41. **a)** $9 + 30x + 25x^2$ **b)** $\frac{x^2}{25} + \frac{6x}{5} + 9$ **c)** $\frac{x^4}{16} + 3x^2 + 36$ **d)** $2 + \sqrt{2}x^3 + \frac{x^6}{4}$ **e)** $3 + 12x + 12x^2$ **f)** $9x^4 + 12x^3 + 4x^2$ **g)** $64 - 16x + x^2$ **h)** $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1$ **i)** $\frac{x^6}{4} - 4x^4 + 16x^2$ **j)** $4 - 25x^2$ **k)** $x^4 - 64x^2$ **l)** $\frac{25x^4}{16} - 7$

42. **a)** $(x+4)^2$ **b)** $(2x+5)^2$ **c)** $(7x+1)^2$ **d)** $(x-10)^2$ **e)** $(5x-3)^2$ **f)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

43. **a)** $(x+3)(x-3)$ **b)** $(5+x)(5-x)$ **c)** $(4+7x)(4-7x)$ **d)** $\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)$ **e)** $(x^2+9)(x^2-9)$ **f)** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{5}\right)$

44. **a)** Quociente: $x+1$ Resto: -2

b) Quociente: $x^2 + 16x + 48$ Resto: 138

c) Quociente: $2x - 2$ Resto: 0

d) Quociente: $\frac{1}{3}$ Resto: $x + 6$

e) Quociente: 0 Resto: $x^2 + 4x - 8$

45. Quociente: $\frac{Q(x)}{2}$ Resto: 2

46. **a)** $3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$

b) $-x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 2x + 2)(-x + 1)$

c) $2x^4 - x^3 - 4x - 3 = (x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 3)$

47. **b)** O quociente seria $(x-1)(x-3)$, ou seja, $x^2 - 4x + 3$ e o resto seria 0 (zero).

48. $B(x)$ tem grau 1 e o resto tem grau 0 (zero).

49. Seja R o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$.

Tem-se $P(x) = (x-1) \times Q(x) + R \Leftrightarrow$

Vem: $P(2) = (2-1) \times Q(2) + R \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(2) = Q(2) + R \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(2) = P(2) + R \Leftrightarrow R = 0$

Portanto, $P(x)$ é divisível por $x-1$.

50. $R(x) = -2x + 11$

51. **a)** Quociente: $2x^2 + x - 2$ Resto: 1

b) Quociente: $-3x^2 + 3x + 4$ Resto: 0

c) Quociente: $-4x^3 + 8x^2 - 6x + 12$ Resto: 1

d) Quociente: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ Resto: 2

52. **a)** -53 **b)** -20 **c)** 11

53. $a = 3$ e $b = -1$

55. -1, 1 e 3

56. $2x^4 - 3x - 5 = (x+1)(2x^3 - 2x^2 + 2x - 5)$

57. -5 e 2

58. Tem-se $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$

Vem: $P(\beta) = (\beta-\alpha)\,Q(\beta) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 = (\beta-\alpha)\,Q(\beta) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Q(\beta) = 0$

Portanto, β é uma raiz de $Q(x)$.

59. -3, 2 e 3 **60.** 8 e 16

61. Dividindo $4x^3 + 12x^2 - x - 3$ por $x + 3$ obtém-se quociente $4x^2 - 1$ e resto 0.
Portanto,
$4x^3 + 12x^2 - x - 3 = (x+3)(4x^2 - 1)$.
Como -3 não é raiz do polinómio $4x^2 - 1$, tem-se que -3 é uma raiz simples do polinómio $4x^3 + 12x^2 - x - 3$.

62. 1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$.

63. **a)** $35x(2x + 1)$ **b)** $4x(-x + 25)$
c) $(10 + x)(10 - x)$ **d)** $(x + 5)^2$
e) $(3x + 1)^2$ **f)** $2x(x - 1)^2$
g) $x(1 + x)(1 - x)$ **h)** $x^4(x + 5)(x - 5)$

64. **a)** $(x + 4)(x - 3)$
b) $-5(x + 3)(x - 1)$
c) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$

65. **a)** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
b) $(x + 2)(x - 5)^2$
c) $(x - 2)(2x^2 + x + 6)$
d) $3(x - 1)^2(x + 4)$

66. **a)** $x(x - 1)(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$
b) $(x + 1)(x - 3)(x + 5)(x - 2)$
c) $(x - 2)^2(x + 1)(x - 1)$
d) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$

67. $a = 1$ e $b = 0$

68. **a)** Sejam a , b , c e d as quatro raízes inteiras.
Tem-se $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.
Vem: $P(0) = (-a)(-b)(-c)(-d)$
pelo que $a_4 = abcd$.
b) Pela alínea anterior, o produto das quatro raízes é igual a a_4 .
Se a_4 for um número primo, não existem quatro números inteiros distintos cujo produto seja a_4 .
Portanto, o polinómio $p(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

69. $a - 1$ e $a + 1$

70. $(\pi - 2)x + 20$

71. $p(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^3 =$

$= \frac{4}{3}\pi x^3 + (2 - 2x)^2(2 - 2x) =$

$= \frac{4}{3}\pi x^3 + (4 - 8x + 4x^2)(2 - 2x) =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 + 8 - 8x - 16x + 16x^2 + 8x^2 - 8x^3 =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 - 8x^3 + 24x^2 - 24x + 8 =$

$= \frac{4\pi}{3}x^3 - \frac{24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8 =$

$= \frac{4\pi - 24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8$

72. **a)** A área da base da pirâmide inicial é $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$, pelo que o seu volume é $\frac{1}{3} \times 72 \times 8 = 192$.
A nova pirâmide é semelhante à inicial, sendo a razão de semelhança das respetivas alturas igual a $\frac{8 - x}{8}$. Portanto, a razão de semelhança dos volumes é $\left(\frac{8 - x}{8}\right)^3$.
Tem-se:
$\left(\frac{8 - x}{8}\right)^3 = \frac{(8 - x)^3}{8^3} = \frac{(8 - x)^2(8 - x)}{512} =$

$= \frac{(64 - 16x + x)^2(8 - x)}{512} =$

$= \frac{512 - 192x + 24x^2 - x^3}{512}$

Portanto, o volume da nova pirâmide é:
$\frac{512 - 192x + 24x^2 + x^3}{512} \times 192 =$

$= \frac{192}{512} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) =$

$= \frac{3}{8} \times (512 - 192x + 24x^2 - x^3) =$

$= -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192$

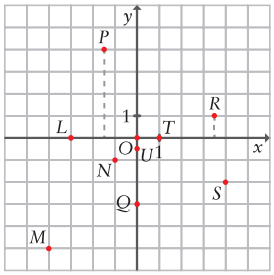
b) Se o tronco de cone tiver altura zero, a nova pirâmide coincide com a pirâmide inicial. Portanto, o volume da pirâmide inicial é igual a $p(0)$. Assim, o volume da pirâmide inicial coincide com o termo independente de $p(x)$.

Tema 3 Geometria Analítica

1. Geometria analítica no plano

Págs. 46 a 58

1. **a)** $A(3,0)$, $B(4,3)$, $C(2,2)$, $D(0,1)$, $E(-1,4)$, $F(-3,2)$, $G(-4,0)$, $H(-2,-1)$, $I(-4,-3)$, $J(0,-2)$, $K(2,-4)$ e $L(3,-1)$
b)



2. -2

3. **a)** $d(A, B) = 13$
b) $d(C, D) = 5$
c) $d(E, F) = \frac{5}{2}$

4. Sejam $A(-3, 2)$, $B(7, 4)$, $C(8, -1)$ e $D(-2, -3)$ os vértices do retângulo.
Tem-se, por exemplo, $d(A, B) = \sqrt{104}$ e $d(B, C) = \sqrt{26}$.
Portanto, a área do retângulo é
$\sqrt{104} \times \sqrt{26} = 2\sqrt{26} \times \sqrt{26} = 2 \times 26 = 52$ (unidades quadradas).

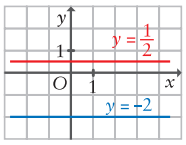
5. **a)** $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A) = \sqrt{125}$
b) $d(A, C) = 20$ e $d(B, D) = 10$
Portanto, a área do losango é
$\frac{20 \times 10}{2} = 100$ (unidades quadradas).

6. **a)** $(5, 10)$ **b)** $(-1, -3)$ **c)** $(2, \sqrt{2})$

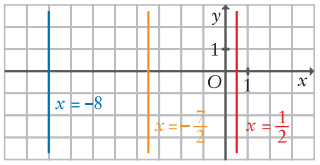
7. **a)** $(2, 1)$ **b)** 10π (unidades de comprimento)

8. $(5, 3)$

9. **a)** $A(-5, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 2)$ e $D(2, 2)$; $y = 2$
b) $r : y = -2$ $s : y = \frac{1}{2}$
c)

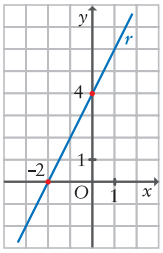


d) $E(3, 4)$, $F(3, 1)$, $G(3, -2)$ e $H(3, -4)$; $x = 3$
e) $d : x = -4$ $e : x = -1$
f)

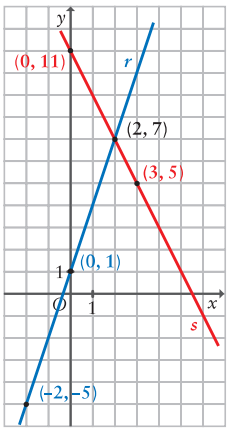


10. **a)** $y = 2x - 1$ **b)** $y = 3x + 4$ **c)** $y = -x - 2$
d) $y = \frac{1}{4}x - 1$ **e)** $y = -3x$ **f)** $y = x$
g) $y = -x$

11. **a)** 4 **b)** -2 **c)**
d₁) 10 **d₂)** -3
e) $y = 2 \times 3 + 4 = 10$;
$-2 = 2x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6 = 2x \Leftrightarrow -3 = x$

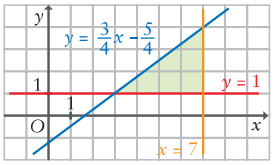


12. **a)** Por exemplo, $(0, 1)$ e $(-2, -5)$.
b) Por exemplo, $(0, 11)$ e $(3, 5)$.
c)



d) $(2, 7)$
e) $7 = 3 \times 2 + 1$ e $7 = -2 \times 2 + 11$

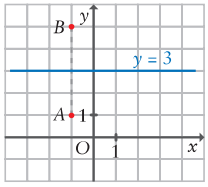
13. **a)**



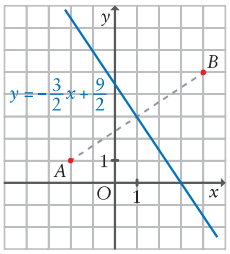
b) $(3, 1)$, $(7, 1)$ e $(7, 4)$

c) A área é 6 (unidades quadradas) e o perímetro é 12 (unidades de comprimento).

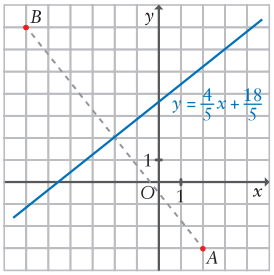
14. a) $y = 3$



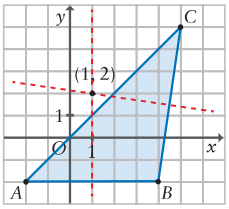
b) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$



c) $y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}$



15. a) e **b)**



c) Por exemplo, $\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

16. a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $x^2 + (y + 1)^2 = 16$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 = 1$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

f) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 10$

17. a) Centro $C(5, -4)$ e raio 6.

b) Centro $C(-1, 7)$ e raio $\sqrt{12}$ $(2\sqrt{3})$.

c) Centro $C(0, -3)$ e raio 1.

d) Centro $C(0, 0)$ e raio $\sqrt{5}$.

18. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

19. a) Centro $C(3, -2)$ e raio $\sqrt{14}$.

b) Centro $C(0, 4)$ e raio 4.

20. $\begin{cases} (x + 4)^2 + (y - 10)^2 = 50 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$

Os pontos de interseção são os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(3, 9)$.

21. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

b) 3

22. a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 36$

b) $x^2 + y^2 \leqslant 2$

c) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 > 16$

d) $(x - 2)^2 + y^2 < 9$

23. 7π (unidades quadradas)

24. Vamos designar o eixo maior por $2a$, o eixo menor por $2b$, a distância focal por $2c$, os focos por F_1 e por F_2 e os vértices por V_1, V_2, V_3 e V_4.

a) $2a = 10$; $2b = 8$; $2c = 6$; $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$; $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$, $V_3(0, 4)$ e $V_4(0, -4)$

b) $2a = 20$; $2b = 12$; $2c = 16$; $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$; $V_1(-10, 0)$, $V_2(10, 0)$, $V_3(0, 6)$ e $V_4(0, -6)$

c) $2a = 6$; $2b = 4$; $2c = 2\sqrt{5}$; $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$; $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(0, 2)$ e $V_4(0, -2)$

d) $2a = 14$; $2b = 4\sqrt{6}$; $2c = 10$; $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$; $V_1(-7, 0)$, $V_2(7, 0)$, $V_3(0, 2\sqrt{6})$ e $V_4(0, -2\sqrt{6})$

25. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ **d)** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

e) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$ **f)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

g) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

26. $2\sqrt{5}$

27. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

28. a) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

b) $F(2, 0)$

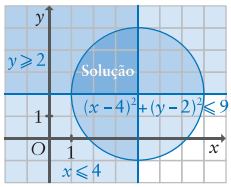
c) Sejam (x, y) as coordenadas de P; então, dado que P é um ponto da elipse, tem-se $y^2 = 2 - \frac{x^2}{3}$.

$$d(P, F) = \sqrt{\frac{2(x-3)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(3 - x) = \frac{\sqrt{6}}{3}(3 - x) \qquad d(P, r) = 3 - x$$

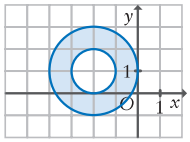
$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}(3 - x)}{3 - x} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

29. $\dfrac{\left(l + \frac{l}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}l^2$

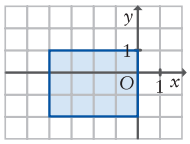
30. a)



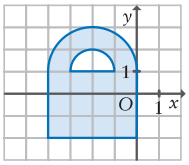
b) $1 \leqslant (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4$



$-4 \leqslant x \leqslant 0 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 1$



Solução



31. a) $y \leqslant 2$ **b)** $x > -1$

c) $y \geqslant x$ **d)** $y < -x$

32. $(|x| \leqslant 2 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 0) \vee x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$

33. a) 18 (unidades quadradas)

b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$

c) $r = d(A, D) = 5$

d) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 \leqslant 25 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 4 \wedge y \leqslant 7$

2. Cálculo vetorial no plano

Págs. 59 a 68

34. a)

Vetores	Mesma direção?	Mesmo sentido?	Mesma norma?	Iguais?
$\vec{a}$ e $\vec{b}$	Não		Sim	Não
$\vec{b}$ e $\vec{c}$	Sim	Sim	Não	Não
$\vec{d}$ e $\vec{e}$	Sim	Não	Sim	Não
$\vec{c}$ e $\vec{f}$	Sim	Sim	Sim	Sim

b) $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 3$

c) d e $\vec{e}$

35. a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (por exemplo)

b) $\sqrt{80}$

36. a) $\overrightarrow{AG}$ **b)** $\overrightarrow{LA}$ **c)** $\overrightarrow{EC}$

d) $\overrightarrow{OH}$ **e)** $\overrightarrow{EF}$ **f)** $\overrightarrow{LJ}$

g) $\overrightarrow{NG}$ **h)** $\overrightarrow{OP}$ **i)** $\overrightarrow{AF}$

j) $\overrightarrow{LM}$ **k)** $\overrightarrow{EJ}$ **l)** $\vec{0}$

37. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

38. $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}$; $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{d}$; $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{c}$;

$\vec{f} = -4\vec{e}$; $\vec{e} = -\frac{1}{4}\vec{f}$; $\vec{g} = 2\vec{h}$; $\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{g}$;

39. **a)** $\overrightarrow{AG}$ **b)** $\overrightarrow{LO}$ **c)** $\overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BG}$

40. **a)** $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$

b) $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

41. Tem-se: $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ}$

Vem: $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}) = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Tem-se, também: $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SR}$

Vem: $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}) = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{SR} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Portanto, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

donde vem $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

Conclui-se, assim, que os segmentos $[PQ]$ e $[SR]$ são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Portanto, o quadrilátero $[PQRS]$ é um paralelogramo.

42. Primeiro caso: $\vec{a} = \vec{0}$

Se $\vec{a} = \vec{0}$, então $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} - \vec{b} = \vec{0} - \vec{b} = -\vec{b}$

Como dois vetores simétricos são colineares, tem-se que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

Segundo caso: $\vec{a} = \vec{b}$

Se $\vec{a} = \vec{b}$, então $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Como o vetor nulo é colinear com qualquer vetor, também neste caso os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ colineares.

Terceiro caso: $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{a} \neq \vec{b}$

Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ colineares, existe um número real λ tal que $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Como estamos a admitir que $\vec{a} \neq \vec{b}$, tem-se $\lambda \neq 1$.

Vem: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{a} = (1 + \lambda)\vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \lambda\vec{a} = (1 - \lambda)\vec{a}$

Portanto, $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}(\vec{a} - \vec{b})$. Logo, os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são colineares.

43. $\vec{a}(6, 2)$; $\vec{b}(0, -2)$; $\vec{c}(-3, 0)$; $\vec{d}(1, -3)$; $\vec{e}(-3, -5)$

44. $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(7, 4)$ e $\vec{w}(4, -6)$

a₁) $(5, 7)$ **a₂)** $(-9, -1)$

a₃) $(20, -1)$ **a₄)** $(23, 9)$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{65}$

c) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

d) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares.

e) $k = -21$

f) $\frac{4}{\sqrt{13}}\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left(-\frac{8}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}\right) =$
$= \left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, \frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$

45. $(6, -2)$

46. **a)** C **b)** M **c)** P **d)** G

47. **a)** $(2, 3)$ **b)** $(-10, 17)$

48. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$

49. **a)** $\overrightarrow{AD}$ **b)** J **c)** A

50. $(-8, 5)$ **51.** $(4, 5)$

52. $(5, 7)$ **53.** $k = 1$

54. **a)** $(-2, 5)$ (por exemplo)

b) $-\frac{5}{2}$ **c)** $y = -\frac{5}{2}x + 8$

55. **a)** $(1, 5)$ (por exemplo) **b)** $k = 15$

56. $(8, 0)$ e $\left(0, -\frac{16}{5}\right)$

57. $y = -2x - 9$

58. $(0, 4)$ (por exemplo)

59. $(-1, 1)$ (por exemplo)

60. **a)** $k = 7$ **b)** $y = 2x - 8$

61. **a)** Não **b)** Sim **c)** Sim

d) Não **e)** Não **f)** Não

g) Não **h)** Sim **i)** Sim

62. Por exemplo:

a) $(x, y) = (-1, 4) + k(3, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

b) $(x, y) = (-1, 4) + k(4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 4 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

c) $(x, y) = (0, 0) + k(1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = k \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

d) $(x, y) = (0, 1) + k(-1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

e) $(x, y) = (0, 2) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

f) $(x, y) = (0, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

63. Por exemplo:

$(x, y) = (3, -1) + k(-6, 6)$, $k \in [0, +\infty[$

64. Por exemplo:

$(x, y) = (5, -2) + k(0, 4)$, $k \in [0, 1]$

65. **a)** $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

b₁) $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in [0, 2]$ (por exemplo)

b₂) $(x, y) = (3, 3) + k(2, 1)$, $k \in [0, +\infty[$ (por exemplo)

c) $k = -2$

66. **a)** $(-1)^2 + 3^2 + 8 \times (-1) - 2 \times 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + 9 - 8 - 6 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

b₁) $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

b₂) $(x, y) = (-1, 3) + k(3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

b₃) $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

3. Geometria analítica no espaço

Págs. 69 a 78

67. **a)** $P(3, 3, 4)$ **b)** $Q(-2, -5, 3)$

c) $R(4, 3, -2)$

68. **a)** $A(2, 3, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(2, 4, -1)$, $D(-1, 4, 1)$, $E(-2, 4, -2)$, $F(-2, -3, 2)$, $G(2, -4, 1)$, $H(2, -3, -1)$, $I(0, 2, 2)$

b₁) $(2, 3, -2)$ **b₂)** $(2, -1, 0)$

b₃) $(-2, 4, -1)$ **b₄)** $(2, 3, 1)$

b₅) $(1, 4, -1)$ **b₆)** $(2, 3, 2)$

b₇) $(-2, -4, 1)$

69. $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(2, 0, 2)$, $E(2, 2, 2)$, $F(0, 2, 2)$, $G(0, 0, 2)$, $P(1, 1, -2)$ e $Q(1, 1, 4)$

70. **a)** $A(0, 0, 4)$, $B(0, 4, 4)$, $C(4, 4, 4)$, $D(4, 0, 4)$ e $E(2, 2, -2)$

b) 32 (unidades cúbicas)

c) $4\sqrt{10}$ (unidades de área)

71. **a)** yOz **b)** xOz **c)** xOy

72. **a)** $y = 4$ **b)** $z = 2$ **c)** $x = -3$

73. **a)** $O(0, 0, 0)$, $P(2, 0, 0)$, $Q(2, 2, 0)$, $R(0, 2, 0)$, $S(0, 0, 4)$, $T(2, 0, 4)$, $U(2, 2, 4)$ e $V(0, 2, 4)$

b) $x = 2$ **c)** $z = 4$

d) $\frac{16}{3}$ (unidades cúbicas)

e) $4\sqrt{2}$ (unidades de área)

74. **a₁)** Oz **a₂)** Oy **a₃)** Ox

b) Por exemplo: $(0, 4, -10)$.

75. **a₁)** Oz **a₂)** Ox **a₃)** Oy

b₁) $x = 2 \wedge y = 4$

b₂) $y = 4 \wedge z = 6$

b₃) $x = 2 \wedge z = 6$

76. **a)** $G(-2\sqrt{3}, 2, 12)$
b) $x = 2\sqrt{3} \wedge y = 2$
c) $x = 2\sqrt{3} \wedge z = 0$
d) $288\sqrt{3}$

77. **a)** 9 **b)** 14 **c)** 5
d) 15 **e)** $\sqrt{14}$

78. **a)** 343 (unidades cúbicas)
b) $y = 5$ **c)** $y = 3 \wedge z = 6$

79. **a)** $x = 5$ **b)** $x = 0 \wedge y = 5$
c₁) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$ **c₂)** $\sqrt{\frac{187}{2}}$

80. **a)** $x = 0$ **c)** $5x - y + 2z - 7 = 0$
b) $x = y$ **d)** $3x + 3y - 2z + 21 = 0$

81. **a)** $3 - 2 \times 3 + 3 \times (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 - 6 - 3 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$; portanto, as coordenadas do ponto R satisfazem a equação do plano.
b) 7 (unidades de comprimento)

82. **a)** $\frac{448}{3}$ (unidades cúbicas)
b) $x + y = 8$ **c)** $z = 7$
d) $y = 8 \wedge z = 7$ **e)** $x = 4 \wedge y = 4$
f) $(-8, 8, 7)$

83. **a)** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$
b) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$
c) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$
d) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
e) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = 2$

84. **a)** $(5, -4, 1)$; 6
b) $(-1, 7, -3)$; $\sqrt{12}$
c) $(0, -3, 0)$; 1
d) $(0, 0, 0)$; $\sqrt{5}$
e) $(1, 2, 3)$; 6
f) $(0, -5, 4)$; 9

85. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 76$

86. 9π (unidades de área)

87. **a)** $H(1, -2, 0)$
b) Tem-se $\overline{GF} = 3$, $\overline{EF} = 1$, $\overline{BF} = 1$.
O volume do paralelepípedo é $3 \times 1 \times 1 = 3$.
A área da base da pirâmide é $3 \times 1 = 3$ e a altura da pirâmide é $c - 1$.
O volume da pirâmide é:
$$\frac{1}{3} \times 3 \times (c-1) = c - 1$$
O volume do sólido é, portanto, igual a:
$$3 + c - 1 = 2 + c$$

88. **a)** $x = 2 \wedge y = 2$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$
c) $3\pi - 4\sqrt{2}$

89. **a)** $x = 3 \wedge z = 3$
b) $(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 \leqslant 9$
c) 108π (unidades cúbicas)
d) $24 + 8\sqrt{2}$ (unidades de comprimento)

90. **a)** $x + y = 2$
b) Não pertence.
c) $y = 2 \wedge z = 0$
d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$
e) $0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 2 \wedge$ $\wedge (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$

91. **a)** $6x - 10y - 2z + 19 = 0$
b) Não pertence.
c) $\frac{\sqrt{174}}{2}$ (unidades de área)
d) $x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$

4. Cálculo vetorial no espaço

Págs. 79 a 84

92. Por exemplo:
a₁) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ **a₂)** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$
a₃) $\overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{BG}$ **a₄)** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EB}$
b₁) $\overrightarrow{AG}$ **b₂)** $\overrightarrow{AG}$
b₃) $\overrightarrow{EB}$ **b₄)** $\overrightarrow{AH}$
b₅) D **b₆)** E
b₇) H **b₈)** $\overrightarrow{FE}$
b₉) B **b₁₀)** D

93. **a₁)** $(-2, -1, 2)$
a₂) $(8, -6, 8)$
a₃) $(8, 4, -8)$
a₄) $(-6, -3, 6)$
a₅) $(1, -2, 3)$
b) $(x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-10)^2 = 9$
c) $\vec{v} = -3\vec{u}$

94. **a)** $\vec{v} = -4\vec{u}$; são colineares.
b) Não são colineares.
c) $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{u}$; são colineares.
d) Não são colineares.
e) Não são colineares.
f) $\vec{u} = -2\vec{v}$; são colineares.
g) Não são colineares.
h) $\vec{u} = -5\vec{v}$; são colineares.

95. $\vec{v}\,(-6, 18, -9)$

96. **a)** $(3, 3, 10)$ **b)** $(25, 2, 21)$
c) $(-9, -1, 2)$ **d)** $(4, -5, 7)$

97. $a = 2$, $b = -5$ e $c = 0$

98. P pertence à superfície esférica de centro em C e raio igual a $\|\vec{v}\|$ se e só se $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$; ora $P = C + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \vec{v}$ e, portanto, $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\vec{v}\|$.

99. $V\,(-1, 12, 15)$

100. **a)** $(3, -9, 3)$ **b)** $(-5, 5, -9)$
c) $(2, 4, 6)$ **d)** $(-2, 6, -2)$

101. **a)** $\sqrt{(2-(-1))^2 + (4-3)^2 + (-1-(-5))^2} =$ $= \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$
b) $\overrightarrow{AB} = B - A$; portanto, as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são $(2, 4, -1) - (-1, 3, -5) =$ $= (2-(-1), 4-3, -1-(-5)) = (3, 1, 4)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

102. $-\frac{1}{2}$

103. **a)** $(4-3)^2 + (1+1)^2 + 3^2 = 14 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + 4 + 9 = 14 \Leftrightarrow 14 = 14$; as coordenadas do ponto A satisfazem a equação que define a superfície esférica, portanto, o ponto A pertence à superfície esférica.
b) $B(2, -3, -3)$

104. **a)** $H(9, 3, 17)$
b) $(x-11)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 49$
c) $x = 6 \wedge z = 15$

105. **a)** $(-2, 4, 8)$ **b)** $\left(\frac{7}{2}, -4, -\frac{3}{2}\right)$

106. $(x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 51$

107. Por exemplo:
a) $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(2, -3, 4), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
b) $(x, y, z) = (1, 4, 3) + \lambda(-2, -2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
c) $(x, y, z) = (3, 2, 0) + \lambda(0, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
d) $(x, y, z) = (1, 0, 4) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
e) $(x, y, z) = (0, 5, -1) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

108. Por exemplo:
$(x, y, z) = (0, 5, 4) + \lambda(3, 0, -4), \lambda \in \mathbb{R}$

109. **a)** Por exemplo:
$(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(2, 4, -2), \lambda \in \mathbb{R}$
b) Por exemplo: $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
c) $(10, -16, 10)$
d) Ponto P

110. **a)** $(-2, 7, 18) = (1, -2, 3) + 3(-1, 3, 5)$
b) Seja $\vec{s}(-1, 3, 5)$ um vetor diretor da reta s ; tem-se $\overrightarrow{AB}(2, -6, -10)$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} = -2\vec{s}$. Então, as retas s e AB são paralelas pois admitem vetores diretores colineares.

111. **a)** 192 (unidades de área)

b) Por exemplo, $\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 10\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) $x = 4$

d) $(-4, 4, 10)$

e) $(2, -2, -5)$

f) $\left(2, 1, \frac{15}{2}\right)$

g) $2y + 5z = 29$

h) $(x-2)^2 + y^2 + (z-10)^2 = 29$

i) $\frac{480 - 40\pi}{3}$ (unidades cúbicas)

112. **a)** 27π (unidades cúbicas)

b) $x = 9$

c) 27 (unidades quadradas)

113. **a)** Por exemplo:
$(x, y, z) = (10, 0, 0) + \lambda(-10, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

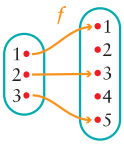
b) $\frac{25}{3}$ (unidades de volume)

Tema 4 Funções Reais de Variável Real

1. Generalidades acerca de funções

Págs. 86 a 92

1. **a)**



b_1) 5

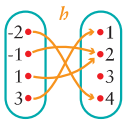
b_2) 3

b_3) 1

b_4) $\{1, 3, 5\}$

2. $\{(-5, 11), (1, -1), (7, -13), (13, -25)\}$

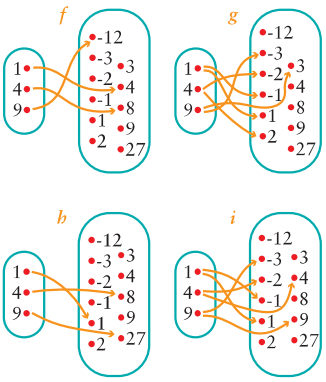
3. **a)**



b) Domínio: $\{-2, -1, 1, 3\}$
Contradomínio: $\{1, 2, 4\}$

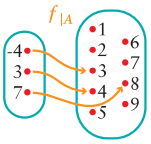
c) $\{-2, -1, 1\}$

4. **a)**



b) As correspondências g e i não são funções de A em B, porque os objetos têm mais do que uma imagem.

5. **a)**

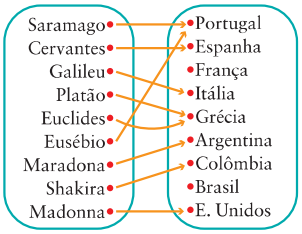


b)

x	-4	9
$f(x)$	3	2

c) $\{3, 5, 7\}$

6. **a)**



b) Domínio: {Eusébio, Maradona}
Conjunto de chegada: B

x	Eusébio	Maradona
$f\|_C(x)$	Portugal	Argentina

7. **a)** As soluções da condição $g(x) = h(x)$ são 6, 8 e 10.

b) $\{2, 8, 100\}$

c) $\{4, 16\}$

8. **a)**

x	3	7	11	15
$f(x)$	1	4	7	10

b) A função f é injetiva porque não existem objetos diferentes com a mesma imagem.

9. **a)** Por exemplo:

x	5	6	7	8	9	25
$f(x)$	14	5	14	20	3	5

b) Não, porque, por exemplo, 5 e 7 têm a mesma imagem.

c) $\{5, 6, 8, 9\}$

10. Se $f(m)$ fosse igual a 2, ter-se-ia $2 \times f(n) = 4$, donde viria $f(n) = 2$. Portanto, m e n teriam a mesma imagem, o que contraria o facto de f ser uma função injetiva.

11. A função f não é sobrejetiva, pois o seu contradomínio é $\{1, 2, 4\}$, que é diferente de B (conjunto de chegada).

12. **a)** 5

b) $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x-4}{3} = y \Leftrightarrow 5x - 4 = 3y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x = 3y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{3y+4}{5}$

Portanto, para cada número real y, existe um número real x tal que $f(x) = y$.

Esse número real x é igual a $\frac{3y+4}{5}$.

c) Para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y. Portanto, todos os elementos do conjunto de chegada pertencem ao contradomínio. Portanto, o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

13. **a)** Não.
Os objetos «Torre» e «Peão» têm a mesma imagem, pelo que a função f não é injetiva. Logo, a função f não é bijetiva.

b) Sim. A função g é injetiva e sobrejetiva. Logo, a função f é bijetiva.

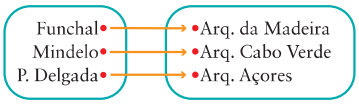
14. Tem-se: $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 4 = 3b + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b$

Portanto, f é injetiva.
Seja $y \in \mathbb{R}$. Tem-se: $3x + 4 = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{3}$

Portanto, para qualquer elemento y do conjunto de chegada ($\mathbb{R}$), existe um objeto x cuja imagem é y.
Assim, f é sobrejetiva. Portanto, a função f é bijetiva.

15. Como A tem cinco elementos e B tem quatro, qualquer função de A em B tem pelo menos dois objetos com a mesma imagem, e portanto não é injetiva. Logo, não é bijetiva.
Como cada objeto só pode ter uma imagem, qualquer função de B em A não é sobrejetiva. Logo, não é bijetiva.

16.

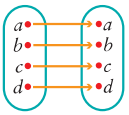


17. **a)**

x	-2	-1	2	3
$g(x)$	4	1	4	9

x	1	4	9	16
$f(x)$	2	8	18	32

b)



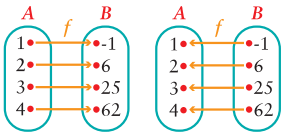
c) $(f \circ g)(x) = 2x^2$

18. **a)** $\{8, 13\}$

b) $(i \circ h)(x) = i[h(x)] = i(x-4) = \sqrt{x-4}$

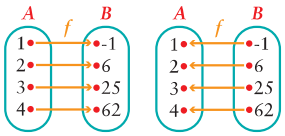
c) $\{2, 3\}$

19.



20. $(f \circ f)(x) = f(x) \Leftrightarrow f[f(x)] = f(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = x$ (pois f é injetiva)

21. **a)**



b) $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}[f(1)] = f^{-1}(-1) = 1$

$(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}[f(2)] = f^{-1}(6) = 2$

$(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}[f(3)] = f^{-1}(25) = 3$

$(f^{-1} \circ f)(4) = f^{-1}[f(4)] = f^{-1}(62) = 4$

Portanto, $f^{-1} \circ f = Id_A$.

$(f \circ f^{-1})(-1) = f[f^{-1}(-1)] = f(1) = -1$

$(f \circ f^{-1})(6) = f[f^{-1}(6)] = f(2) = 6$

$(f \circ f^{-1})(25) = f[f^{-1}(25)] = f(3) = 25$

$(f \circ f^{-1})(62) = f[f^{-1}(62)] = f(4) = 62$

Portanto, $f \circ f^{-1} = Id_B$.

22. **a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{6}$

b) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(6x+5) =$

$= \dfrac{6x+5-5}{6} = \dfrac{6x}{6} = x$

Portanto, $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{x-5}{6}\right) =$

$= 6 \times \dfrac{x-5}{6} + 5 = x - 5 + 5 = x$

Portanto, $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$.

23. **a)** $f(x) = ax + b$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow ax + b = \dfrac{x-b}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x + ab = x - b \Leftrightarrow a^2x - x = -b - ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(a^2-1) = -b - ab \Leftrightarrow x = \dfrac{-b-ab}{a^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b(1+a)}{(a-1)(a+1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$

Portanto, o número real x_0 tal que $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ é $\dfrac{b}{1-a}$.

2. Generalidades acerca de funções reais de variável real

Págs. 93 a 102

24. h não é função real de variável real porque D_h não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

25. **a)** $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

e) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

f) $[-5, +\infty]$

g) $\mathbb{R}$

h) $[-2, +\infty[\setminus \{0\}$

i) $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right] \setminus \{2\}$

j) $]-\infty, 3] \setminus \{0, 2\}$

k) $]6, +\infty[$

l) $\mathbb{R}_0^+$

m) $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

n) $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$

o) $\left[\dfrac{1}{2}, 8\right] \setminus \{5\}$

p) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$

26. **a)**

x	-3	0	3
$f(x)$	10π	4π	$2\sqrt{10}\pi$

x	1	2	4
$g(x)$	-5	2	10

x	$\overrightarrow{PQ}$	$\overrightarrow{PR}$	$\overrightarrow{QR}$
$h(x)$	$\sqrt{13}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$

b) A função h não é função real de variável real porque o seu domínio não é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

27. **a)**

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	2	-2	3	1	-1	2

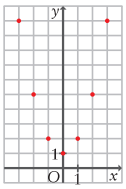
b) $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$D'_f = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

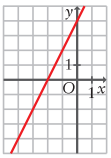
c) $\{-1, 4\}$

d) $\{-2, 0, 3\}$

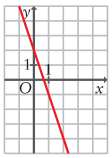
28.



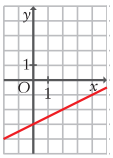
29. **a)**



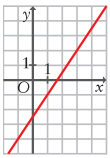
b)



c)



d)



30. **a)** $(6, 0)$

b) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{2}$

31. B; C; E

32. A imagem de 2 não pode ser simultaneamente 3 e -4.

33. **a)** 6

b) Não, porque a imagem de a não pode ser simultaneamente 5 e 7.

34. A; D; E

35. $A(a, -a)$; $\overline{OA} = -\sqrt{2}a$

$B(b, b)$; $\overline{OB} = \sqrt{2}b$

$\overline{OA} = \overline{OB} \Leftrightarrow -a = b$

$f(a) = -a = b = f(b)$

a e b têm a mesma imagem, logo f não é injetiva.

36. 12

37. **a)** f é par.

b) g não é par.

c) h é par.

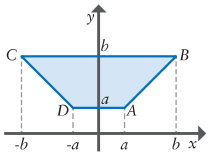
38. Não porque $10 \in D_f$ mas $-10 \notin D_f$.

39. f não é par.

40. A; B

41. $\{-6, 6\}$

42. Tem-se $A(a, a)$ e $B(b, b)$.



Como os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, tem-se $g(a) = a$ e $g(b) = b$.

Como a função g é par, tem-se:

$-a \in D_g$, $-b \in D_g$, $g(-a) = g(a)$ e $g(-b) = g(b)$.

Portanto, os pontos $C(-b, b)$ e $D(-a, a)$ pertencem ao gráfico da função g.

O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio, cuja área é:

$\dfrac{2b+2a}{2} \times (b-a) = (b+a)(b-a) = b^2 - a^2$

43. Designemos por a abcissa de A e por b a abcissa de B, com $a \neq b$.

Suponhamos que $b = -a$.

Nesse caso, as coordenadas de A seriam $(a, a+2)$ e as coordenadas de B seriam $(b, b+2) = (-a, -a+2)$. Como f é par, viria $a + 2 = -a + 2 \Leftrightarrow a = 0$, pelo que b também seria 0, o que é impossível porque $a \neq b$.

44. -3

45. $f(0) + f(1) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow 0 + f(1) = 1 - f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{2}$

46. $D'_f = \{-2, 1, 3\}$; $D'_g = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$

47. **a)** par

b) nem par nem ímpar

c) nem par nem ímpar

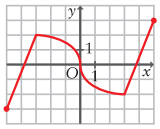
d) par

e) ímpar

f) ímpar

48. A; C

49.



50. **a)** g **b)** f

c) g **d)** f

51. f é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-x)^{2n+1} + b(-x)^{2n-1} + c =$

$= -(ax^{2n+1} + bx^{2n-1} + c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-x)^{2n}(-x) + b(-x)^{2n}(-x)^{-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -ax^{2n} \times x - bx^{2n} \times x^{-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} + c =$

$= -ax^{2n+1} - bx^{2n-1} - c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = -c \Leftrightarrow c = 0$

52. **a)** Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = x + 1$ é injetiva mas não é ímpar.

b) Falsa, por exemplo a função representada no exercício **48** (**C**) é ímpar e não é injetiva.

c) Verdadeira, se o domínio é $\mathbb{R}$, 0 pertence ao domínio, logo a imagem de zero é zero, pelo que o seu gráfico interseta a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

d) Falsa, por exemplo a função f definida por $f(x) = 0$ é simultaneamente par e ímpar.

53. $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) =$

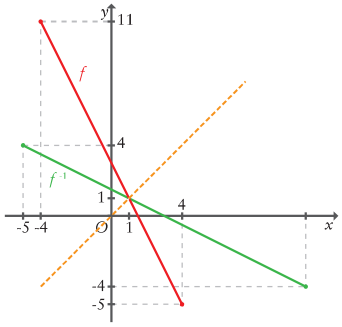
$= (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}$

54. 6

55. **a)**

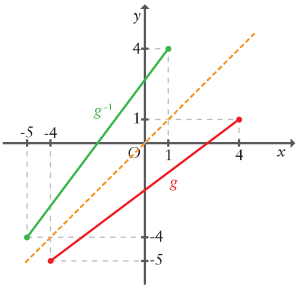
$f^{-1} : [-5, 11] \to [-4, 4]$

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



b) $g^{-1} : [-5, 1] \to [-4, 4]$

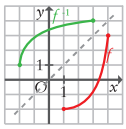
$g^{-1}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$



56. **a)** $a = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{5}{3}$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

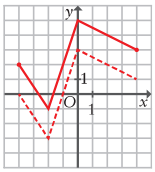
57. **a)** $f^{-1}(-1) = 3$

b)

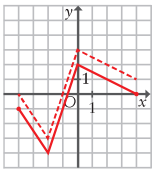


58. Em cada alínea está, a tracejado, o gráfico original e, a cheio, o transformado.

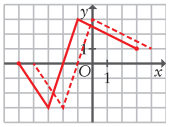
a)



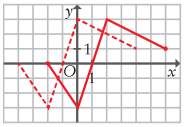
b)



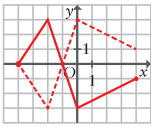
c)



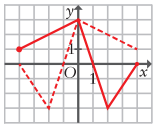
d)



e)

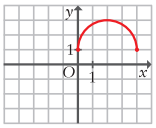


f)

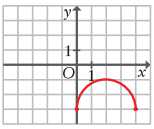


59.

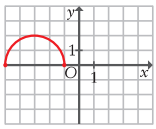
a)



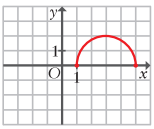
b)



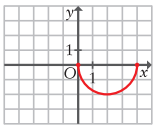
c)



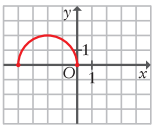
d)



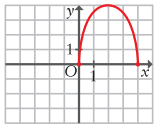
e)



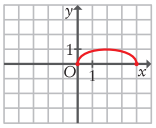
f)



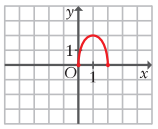
g)



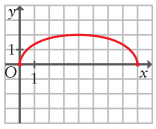
h)



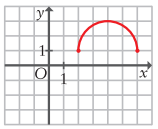
i)



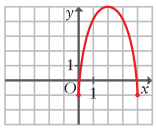
j)



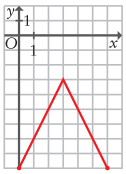
k)



l)



60.



61. Sendo a a abcissa dos pontos de interseção dos gráficos, tem-se $f(a) = f(a - 3)$.

Portanto, a função f não é injetiva.

3. Monotonia, extremos e concavidade

Págs. 103 a 109

62. **a)** Imagem de zero: 6 Zero: $-\frac{9}{2}$

b) Imagem de zero: –9 Zeros: $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$

c) Imagem de zero: 16 Zero: 4

d) Imagem de zero: 4 Zeros: $\frac{1}{2}$ e 4

e) Imagem de zero: 0 Zeros: – 2 e 0

f) Imagem de zero: 0 Zeros: 0 e 4

g) Imagem de zero: –6 Zeros: 1, 2 e 3

h) Imagem de zero: –3

Zeros: –3, $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ e $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

63. $p = -1$ e $q = -6$

64. $a = -5$, $b = -8$ e $c = 12$

65. Imagem de zero: –2 Zeros: –3, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e 3

66. **a)** Imagem de zero: 6 Zeros: 2 e 4

b) $\{0, 1\}$

c) $\{3, 5\}$

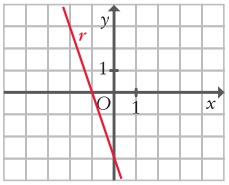
67. **a)** Imagem de zero: –2 Zeros: –3, 1 e 4

b) $[-5, -3[\cup]1, 4[$

c) $]-3, 1[\cup]4, 5]$

68. **a)** $h(x) = -3x - 3$

b)



c) $]-\infty, -1[$ **d)** $]-1, +\infty[$

69. Como a função g é positiva, o seu gráfico está acima do eixo Ox.
O gráfico de h também está acima do eixo Ox, pois ele é obtido a partir do gráfico de g por meio de uma translação horizontal. Portanto, a função h também é positiva em $\mathbb{R}$.

70. Como $f(0) = -2$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) < -2$, a função f é negativa em $[0, +\infty[$.
Como f é par, tem-se $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
Portanto, a função f também é negativa em $]-\infty, 0[$, pelo que a função f é negativa em $\mathbb{R}$. Assim, é a primeira proposição que é verdadeira.

71. **a)** $D'_f = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) Tem-se: $\forall x \in D_f, 1 \leqslant f(x) \leqslant 9$

72. Como o conjunto de chegada da função g é $\mathbb{R}^+$, tem-se $D'_g \subset \mathbb{R}^+$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.
Como, por hipótese, se tem $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 5$, vem: $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < g(x) < 5$. Portanto, a função g é limitada.

73. Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, -3 \leqslant g(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 6 \geqslant -2g(x) \geqslant -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 11 \geqslant -2g(x) + 5 \geqslant -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3 \leqslant h(x) \leqslant 11$

Portanto, a função h é limitada.

74. **a)** g é majorada; 0 é um majorante
h é majorada; 4 é um majorante
i é majorada; 16 é um majorante
k é majorada; 3 é um majorante

b) f é minorada; 0 é um minorante
h é minorada; -5 é um minorante
i é minorada; -6 é um minorante
k é minorada; 0 é um minorante

c) h, i e k

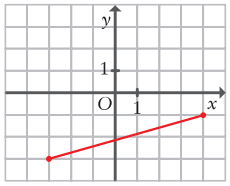
75. Tem-se $\forall x \in A \cup B, -4 < h(x) < 8$.
Portanto, a função h é limitada.

76. Como função f é limitada, existem m e M tais $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Portanto, $D'_f \subset [m, M]$.
Como $D'_g \subset D'_f$ e $D'_f \subset [m, M]$, vem $D'_g \subset [m, M]$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant g(x) \leqslant M$.
Logo, a função g é limitada.

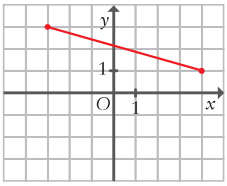
77. **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V
e) V **f)** F **g)** V **h)** V

78. **a)** V **b)** V **c)** V **d)** F
e) F (Repara que $3 > -1$, mas $f(3) > f(-1)$).

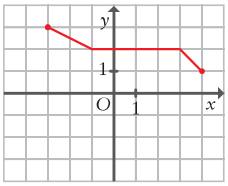
79. **a)** Por exemplo:



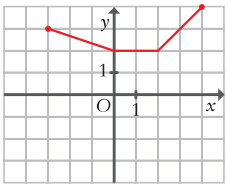
b) Por exemplo:



c) Por exemplo:



d) Por exemplo:



80. **(C)**

81. **a)** Tem-se, para quaisquer reais a e b:

$f(b) > f(a) \Leftrightarrow 3b - 4 > 3a - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3b > 3a \Leftrightarrow b > a$

Portanto, $f(b) > f(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow f(b) > f(a)$.

b) Tem-se, para quaisquer reais a e b:

$g(b) < g(a) \Leftrightarrow -b + 2 < -a + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -b < -a \Leftrightarrow b > a$

Portanto, $g(b) < g(a) \Leftrightarrow b > a$, pelo que $b > a \Rightarrow g(b) < g(a)$.

82. Tem-se, para quaisquer reais a e b:
$b > a \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow -f(b) > -f(a) \Rightarrow g(b) > g(a)$
Portanto, $b > a \Rightarrow g(b) > g(a)$.

83. **a)** $D'_f = \{-3, -1, 0, 1, 2, 5\}$

b) -3 **c)** 5

84. **a)** $D'_g = [-2, 6]$

b) Mínimo absoluto: -2.
Máximo absoluto: 6.

85. **a)** $]3, 7[$ **b)** $]-5, -3[$ **c)** $]0{,}5; 1[$

86. **a)** $]2, 5]$ **b)** $[-4, -3[$

87. **a)** $[-4, 4]$ **b)** 4 **c)** -4

d) A função f tem um máximo relativo igual a 3 para $x = -5$ e tem um máximo relativo igual a 4 para $x = 3$.

e) A função f tem um mínimo relativo igual a -3 para $x = -1$ e tem um mínimo relativo igual a -4 para $x = 5$.

88. Como n é par, tem-se, para qualquer número real x, $x^n \geqslant 0$, donde vem $ax^n \geqslant 0$, pois $a > 0$.
Daqui resulta que $ax^n - b \geqslant -b$.
Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant -b$.
Por outro lado, tem-se $f(0) = -b$.
Como $f(0) = -b$ e como $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant -b$, vem que $-b$ é a menor das imagens.
Portanto, $-b$ é o mínimo absoluto da função f.

89. **a)** Tem-se $A(a, 5a^2)$ e $B(b, 5b^2)$.
O declive da reta AB é

$$\frac{5b^2 - 5a^2}{b - a} = \frac{5(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{5(b - a)(b + a)}{b - a} =$$
$$= 5(b + a) = 5a + 5b$$

b) O declive da reta PQ é $5p + 5q$.
O declive da reta QR é $5q + 5r$.
Como $p < r$, tem-se $5p < 5r$, pelo que $5p + 5q < 5q + 5r$.
Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

90. Sejam A e B dois pontos de f de abcissas a e b, respetivamente, com $a > b$.
Tem-se $A(a, -3a^2 + 2a + 6)$ e $B(b, -3b^2 + 2b + 6)$.
O declive da reta AB é:

$$\frac{-3b^2 + 2b + 6 - (-3a^2 + 2a + 6)}{b - a} =$$
$$= \frac{3a^2 - 3b^2 - 2a + 2b}{b - a} =$$
$$= \frac{3(a^2 - b^2) - 2(a - b)}{b - a} =$$
$$= \frac{3(a - b)(a + b) - 2(a - b)}{b - a} =$$
$$= \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{b - a} =$$
$$= \frac{(a - b)[3(a + b) - 2]}{-(a - b)} =$$
$$= -[3(a + b) - 2] = 2 - 3a - 3b$$

Sejam P, Q e R três pontos do gráfico da função f, de abcissas p, q e r, respetivamente, com $p < q < r$. O declive da reta PQ é $2 - 3p - 3q$. O declive da reta QR é $2 - 3q - 3r$. Como $p < r$, tem-se $-3p > -3r$, pelo que $2 - 3p - 3q > 2 - 3q - 3r$. Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

4. Estudo elementar de algumas funções e operações sobre funções

Págs. 110 a 127

91. **(A)**, **(B)** e **(C)**

92. **a)** $f(x) = 3(x - 5)^2$

b) $x = 5$

c) $(7, 8)$

93. **a₁)** -2 e 2

a₂) Coordenadas do vértice: $(0, -4)$.
Equação do eixo de simetria: $x = 0$.
O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

b₁) -2 e 2

b₂) O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

b₃) 3

c₁) O gráfico tem a concavidade voltada para cima.

c₂) $b = 5$ e o maior zero é igual a 7.

d₁) $k = 9$

d₂) $3(x-5)^2 - 3 = 3x^2 - 30x + 72$

d₃) 72

94. **a)** $(-3, 4)$

b₁) $x^2 + y^2 = 25$ **b₂)** $(-3, -4)$ **b₃)** 24

95. **a)** $4x^2 - 12x + 3 = 4(x^2 - 3x) + 3 =$

$= 4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6$

b) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

c) $56\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

96. **a)** $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ **b)** $x = \frac{3}{2}$

c) $x = \frac{3}{2}$ **d)** 2

97. **a₁)** -1

a₂) $x = -1$

a₃) Concavidade voltada para cima.

a₄) -4 e 2

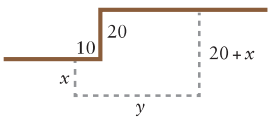
a₅) $]-4, 2[$

b₁) $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 3$

b₂) $\left(0, -\frac{26}{3}\right)$

98. $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$

99. **a)** Tem-se, de acordo com o esquema seguinte:



$x + y + 20 + x = 100$

Daqui vem: $y = 80 - 2x$

Portanto, a área do jardim é dada por:

$(80 - 2x)(20 + x) - 10 \times 20 =$
$= 1600 + 80x - 40x - 2x^2 - 200 =$
$= -2x^2 + 40x + 1400$

b) $x = 10$ Área $= 1600$

100. **a)** $]-3, 3[$ **b)** $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

c) $]0, 15[$ **d)** $\left]-\frac{1}{3}, 4\right]$

e) $\mathbb{R}$ **f)** $\{-2\}$ **g)** $\varnothing$ **h)** $\left[0, \frac{4}{3}\right]$

101. **a)** 5 litros **b)** 16 horas

102. **a)** -2 e 2

b) $-\frac{5}{2}, -2, 2$ e $\frac{5}{2}$

c) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

d) $\left]-\frac{5}{2}, -2\right[\cup \left]2, \frac{5}{2}\right[$

103. As funções das alíneas a), c), e) e f) definem funções cúbicas.

a) $a = 2$; $b = 0$; $c = -1$; $d = 1$

c) $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2}$; $d = 0$

e) $a = -4$; $b = 4$; $c = -1$; $d = 0$

f) $a = 8$; $b = -12$; $c = 6$; $d = -1$

104. **a)** 2 **b)** $0, -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ **c)** 0 e $\frac{1}{2}$

d) $-1, 2$ e 3 **e)** -1 **f)** -3

g) $-1, 0$ e $\frac{1}{2}$ **h)** 1 e 2

105. **a)** $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)(x - 1) =$

$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-2) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$

c) $f(x) = -2x^3$

106. **a)** $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-1)(x-3)$

b) $g(x) = (x+2)^2(x-1)$

c) $h(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

107. **a)** A função tem dois zeros que são números simétricos (a e $-a$) e, portanto, o gráfico de f tem de intersetar o eixo das abcissas em dois pontos simétricos em relação à origem do referencial.

b) Os zeros de g são $a - 1$, a e $a + 1$, portanto, sendo $A(a-1, 0)$, $B(a, 0)$ e $C(a+1, 0)$, tem de ser $\overline{AB} = \overline{BC}$.

c) A função h só tem um zero (a) e o gráfico apresentado é de uma função com dois zeros.

d) O único zero da função é a; ora, no gráfico apresentado, o zero da função é um número positivo, mas, então, o gráfico teria de começar por ter a concavidade voltada para baixo, pois a também é o coeficiente do termo de grau 3 do polinómio que define a função j.

108. **a)** $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$ **b)** $]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$

c) $]-2, +\infty[$ **d)** $[-1, 0] \cup [2, +\infty[$

e) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$ **f)** $[2, +\infty[\setminus \{3\}$

g) $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

109. $]-\infty, -1[\cup]2, 3[$

110. **a)** Os zeros são $-2, -1, \frac{1}{2}$ e 1;

$CS = [-2, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Os zeros são $-2, 0$ e 1; $CS = \{-2\} \cup [0, 1]$

c) Os zeros são -1 e 2; $CS =]-\infty, 2]$

111. **a)** $f(x) = \frac{1}{6}(x+2)x(x-2)(x-3)$

b) $g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$

c) $h(x) = -\frac{1}{9}(x+3)^3(x-1)$

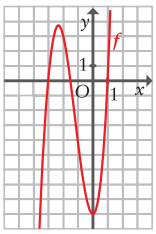
112. **a)** $a = 2$ e $b = 7$

b₁) $f(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+3)$

b₂)

x	$-\infty$	-3		$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x+3)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b₃)



b₄) $k \in]9, +\infty[$

113. **a)** $(0, 0)$, $(-1, 4)$ e $(2, 4)$

b) A área é 6 (unidades de área) e o perímetro é $3 + \sqrt{17} + \sqrt{20}$ (unidades de comprimento).

114. **a)** 1 (unidade de área)

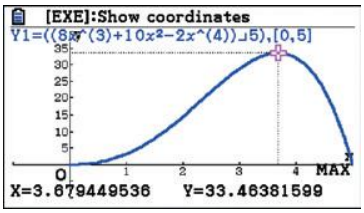
b) Os zeros de h são $-2, 4$ e 6 e os zeros de j são $-3, -2$ e 1.

c) $k \in]-3, -2[$

d) $\left(4, \frac{10}{3}\right)$

115. $a(x) = \frac{8x^3 + 10x^2 - 2x^4}{5}$, $D_a =]0, 5[$

A área atinge o máximo em 3,7.



116. $D'_f = \{1, 2, 6\}$

117. **a)** $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(\sqrt{4}) = 1$,

$g(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $g\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{5}$,

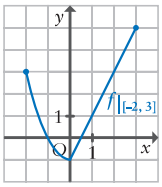
$g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2\pi$ e $g\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right) = -\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}$ é imagem de $\frac{4}{3}$, $\sqrt{3}$ é imagem de $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{1}{4}$ é imagem de $-\frac{1}{2}$.

118. **a)** $f(-\sqrt{2}) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$, $f(3) = 5$ e $f(a^2 + 2) = 2a^2 + 3$

b) $CS = \left\{-3, \frac{9}{2}\right\}$

c) $D' = [-1, 5]$



119. **a₁)** $\{-3, 1\}$ **a₂)** $[-4, -3[\cup]1, 3[$

b) Três

c) Qualquer intervalo contido em $[-4, 0]$, qualquer intervalo contido em $[0, 2]$ ou qualquer intervalo contido em $[2, 3[$.

d)

x	-4		0		2	3
g	Mín. -2	↗	Máx. 2	↘	Mín. -2	↗

e) $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)^2 - 2 & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$

120. 6 (unidades de área)

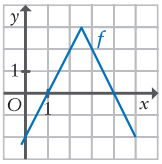
121. $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2|$ $g(x) = 2|x - 1| + 1$

$j(x) = -|x + 1| + 3$

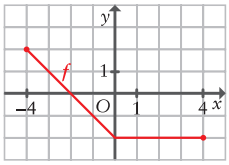
122. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{se } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 5 & \text{se } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$

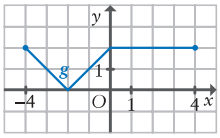
123. $f(x) = -2\left|x - \frac{5}{2}\right| + 3$



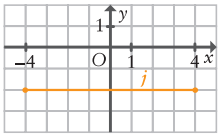
124. **a)**



b)

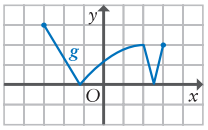


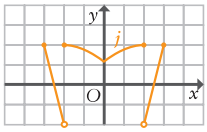
$g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } -4 \leqslant x < -2 \\ x + 2 & \text{se } -2 \leqslant x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$



$D_j = [-4, 4]$ e $j(x) = -2$

125.





126. **a)** $\{-2, 2\}$ **b)** $\{-3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

c) $\varnothing$ **d)** $\{-2, 2\}$

e) $\{-1, 2\}$ **f)** $\frac{1}{2}$

g) $\left\{-3, -\frac{1}{3}\right\}$ **h)** $\{-3, -1, 1, 3\}$

i) $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ **j)** $]-\infty, -4] \cup [8, +\infty[$

k) $\mathbb{R}$ **l)** $]-2, 2[$

m) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

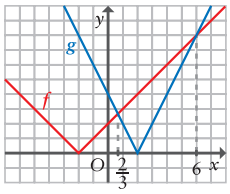
n) $[0, 3]$ **o)** $[-3, -1] \cup [1, 3]$

p) $]-\infty, -6[\cup]-5, 0[\cup]1, +\infty[$

q) $\varnothing$ **r)** $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$

s) $]-\infty, 1[$ **t)** $\left]-6, \frac{4}{5}\right[$

127.

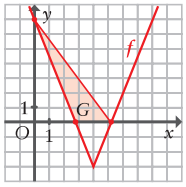


$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 6$;

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \wedge x < 6$

128. $a = -4 \wedge b = -8$ ou $a = 4 \wedge b = 8$

129. **a)** Área: 8,4 (unidades de área)

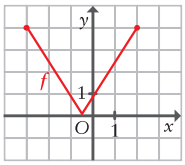


b) A função é decrescente em $]-\infty, 4]$ e é crescente em $[4, +\infty[$; atinge o mínimo em 4.

c) $]-\infty, 5]$

130. As retas AB e CD são paralelas à reta de equação $y = x$ e as retas AD e BC são paralelas à reta de equação $y = -x$; portanto, as retas AB e CD são perpendiculares às retas AD e BC . Área: 8 (unidades de área)

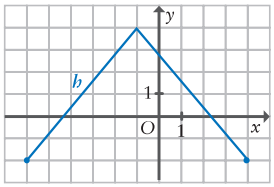
131. **a)**



b) $\forall x \in D_j, 0 \leqslant f(x) \leqslant 5$

c) 8 (unidades de área)

d₁)



d₂) A função h é crescente em $[-6, -1]$ e é decrescente em $[-1, 4]$; 3 é máximo de h e -2 é mínimo.

132. $f(x) = \sqrt{x - 2} - 1$ e $g(x) = \sqrt{4 - x} + 1$

133. $D_{h^{-1}} = [0, +\infty[$, $D'_{h^{-1}} =]-\infty, 0]$ e $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$D_{k^{-1}} = [0, +\infty[$, $D_{k^{-1}} =]-\infty, 0]$ e $k^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$D_{j^{-1}} = [1, +\infty[$, $D_{j^{-1}} =]-\infty, 4]$ e $j^{-1}(x) = 4 - (x - 1)^2$

$D_{t^{-1}} =]-\infty, 2[$, $D_{t^{-1}} = [1, +\infty[$ e $t^{-1}(x) = \sqrt{2 - x} + 1$

134. **a)** $\{-3\}$ **b)** $\{1\}$ **c)** $\varnothing$

d) $\{0, 1\}$ **e)** $\{-4\}$ **f)** $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

g) $\varnothing$ **h)** $[0, +\infty[$ **i)** $]-\infty, 2]$

j) $\varnothing$ **k)** $\{-1\}$ **l)** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

m) $[-1, 8]$ **n)** $]-\infty, 1]$ **o)** $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$

p) $[-1, 3]$ **q)** $]-1, 1]$ **r)** $[0, 1]$

135. **a)** $a = -4$ **b₁)** -3 **b₂)** $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

136. **a)** Por exemplo, $(h \circ j)(4) = 2$ e $(j \circ h)(4) = \sqrt{8}$

b) $CS = \{4\}$; os gráficos de h e j intersetam-se no ponto de abcissa 4.

137. **a)** $\begin{cases} a\sqrt{16} + b = 3 \\ a\sqrt{9} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 11 \end{cases}$

b) 20 251

138. **a)** 12 000 clientes **b)** 40 €

c) 10 € (50 € não faz sentido no contexto do problema)

d) A receita obtida com a venda do jogo MatA é dada por $p\sqrt{180 - 3{,}6p}$; tem como valor máximo 258 199 (valor em euros, arredondado às unidades). A receita obtida com a venda do jogo MatB é dada por $p(15 - 0{,}3p)$; tem como valor máximo 187 500 (valor em euros). De acordo com os modelos apresentados, o jogo que pode dar maior receita é o MatA.

139. $(-1, -2)$ e $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

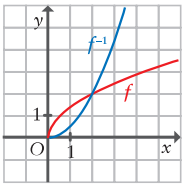
140. **a)** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

b) $f^{-1}: [-1, +\infty[\to \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ tal que

$f^{-1}(x) = \frac{5-(x+1)^2}{2}$

141. **a)** $D_f =]3, +\infty[$ **b)** 6

142. **a)** $D_{f^{-1}} = [0, +\infty[$,
$D'_{f^{-1}} = [0, +\infty[$
e $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}$



b₁) $P(x, \sqrt{2x})$

$d(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x})^2} =$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x} = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$

b₂) $(1, \sqrt{2})$ e $(3, \sqrt{6})$

b₃) $(2, 2)$

143. **a)** -1 e 11

b) 66 e -2

c) $B(0, -3)$, $A(x, \sqrt{x-2} - 3)$,

$d(A, C) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x-2} - 4)^2}$ e

$d(A, B) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x-2})^2}$

$d(A, C) = d(A, B) \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{x-2-4})^2 =$
$= x^2 + (\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow x - 2 - 8\sqrt{x-2} + 16 =$
$= x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6$

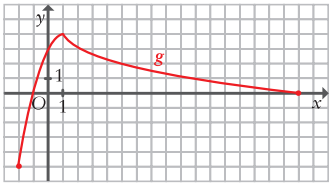
O ponto A tem coordenadas:

$(6, \sqrt{6-2} - 3) = (6, -1)$

Então, $d(A, C) = d(A, B) = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ e, dado que, $d(B, C) = 4$, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é $4 + 2 \times 2\sqrt{10} = 4 + 4\sqrt{10}$.

144. **a)** -1 e 17 **b)** $]-1, 17[$

c)

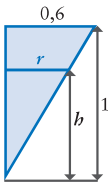


d) g é crescente em $[-2, 1]$ e é decrescente em $[1, 17]$; -5 e 0 são mínimos e 4 é máximo.

145. **a)** $\{-5\}$ **b)** $\{14\}$ **c)** $\{-7, 4\}$
d) $\{-1, 2\}$ **e)** $\{-1, 0\}$ **f)** $\{-1, 0\}$
g) $[2, +\infty[$ **h)** $]-4, 4[$ **i)** $]-2, +\infty[$

146. **a)** $0{,}12\pi \text{ m}^3$

b)



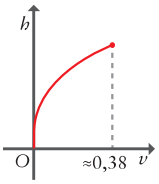
Recorrendo à semelhança de triângulos, tem-se $r = 0{,}6h$ e, portanto:

$v(h) = \frac{1}{3} \times \pi \times (0{,}6h)^2 \times h =$

$= \frac{0{,}36}{3} \times \pi \times h^2 \times h = 0{,}12\pi h^3$

c) 50 cm

d) $D_h = [0; 0{,}12\pi]$ e $h(v) = \sqrt[3]{\frac{v}{0{,}12\pi}}$



147. **a)** $f(0) = 1$; os zeros são -7 e $\frac{1}{2}$.

b) $\left]-7, \frac{1}{2}\right[$

148. **a₁)** 1 **a₂)** -3 **a₃)** 0

b₁) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **b₂)** $\{1, 3, 5\}$ **b₃)** $\{3, 4, 5\}$

c) $\{2, 4\}$

149. **a₁)** 0 **a₂)** -4 **a₃)** $\sqrt{2} - 5$

b₁) $[1, 3[\cup]3, +\infty[$ **b₂)** $[1, 5[\cup]5, +\infty[$

b₃) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

150. **a₁)** 4 **a₂)** $-\frac{1}{2}$

b₁) $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ **b₂)** $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ **b₃)** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) Dado que $4 \in D_{f \times g}$, só temos que confirmar que $(f \times g)(4) = -4$; com efeito, $(f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = -1 \times 4 = -4$.

d) -1

e) 0 e 3

f) -1 e 3

g) $]-\infty, 0] \cup \{3\}$

h) As duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$.

i) $D_{f \times g} = \mathbb{R}$ e $(f \times g)(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

151. **a)** A soma de duas funções afins pode ter um zero, pode não ter zeros ou pode ter uma infinidade de zeros, consoante a soma seja uma função polinomial de grau 1, constante, não nula, ou a função nula.

Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -4x + 2$ a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = -2x + 3$, que tem um zero.
- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x + 2$ a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = 3$, e não tem zeros.
- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$ a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = 0$, e tem uma infinidade de zeros.

b) A soma de uma função quadrática com uma função afim é sempre uma função quadrática e, portanto, pode não ter zeros, ter um zero ou ter dois zeros, como se apresenta nos exemplos seguintes.

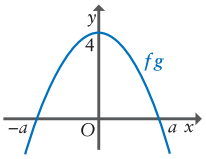
Exemplos:

- Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 3$, e não tem zeros.
- Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 + 1$, a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1$, e tem um zero.
- Se $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 + x - 1$, a função $f + g$ é definida por $(f+g)(x) = x^2 + 4x$, e tem dois zeros.

152. **a)** A função $f + g$ não tem zeros. As retas r e s têm declives simétricos e a mesma ordenada na origem e, portanto, $(f+g)(x) = 2b$, com $b \neq 0$.
A função $f - g$ toma o valor zero na abcissa do ponto em que os gráficos das funções se intersetam pois:
$(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
Neste caso, como os gráficos se intersetam no ponto $(0, b)$, conclui-se que 0 é o zero de $f - g$.
A função $f \times g$ tem dois zeros: a e $-a$.
$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$
O zero da função $\left(\frac{f}{g}\right)$ é o zero de f.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge$
$\wedge\ g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = a$

b) Como f e g são funções polinomiais de grau 1, a função $f \times g$ é uma função quadrática. O seu gráfico é uma parábola que interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas a e $-a$. Como as retas r e s têm declives de sinais contrários, a parábola que é o gráfico de $f \times g$ tem a concavidade voltada para baixo. Este pode ser a representação gráfica de $f \times g$.



153. **a)** $D_f =]-\infty, 6]$ e $D_g = [2, +\infty[$

b) $D_g = [2, 6]$; 2 é o único zero

154. **a₁)** -1 **a₂)** -3 **a₃)** -2 **a₄)** 1

b₁) $[-3, 3] \setminus \{-1, 1\}$ **b₂)** $[-3, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right]$

b₃) $[-1, 1]$

c) $D_{f+g} = [-3, 3]$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{se } -3 \leqslant x < 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ -x^2 + 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

155. **a)** $D_{f+g} = \mathbb{R}$ e $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $f - g$ tem três zeros; $\frac{f}{g}$ não tem zeros

c) CS $= \mathbb{R}$

Tema 5 Estatística

1. Características amostrais

Págs. 129 a 136

1. **a)** $\sum_{k=1}^{6} k^3$

b) $\sum_{j=5}^{7} \frac{13}{j}$

c) $\sum_{i=10}^{13} \sqrt{i}$

2. **a)** 30

b) 34

c) 165

d) 112

e) 42

3. **a)** V

b) F

c) V

d) V

4. **a)** $\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{50} (10j) - 7\sum_{j=1}^{50} j\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{50} (10j) - \sum_{j=1}^{50} 7j\right) =$

$= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{50} (3j) = \frac{1}{3} \times 3 \times \sum_{j=1}^{50} j = \sum_{j=1}^{50} j$

b) $\sum_{k=1}^{60} (k-2)^2 + 4\sum_{k=1}^{60} k =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4) + \sum_{k=1}^{60} (4k) =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 - 4k + 4 + 4k) =$

$= \sum_{k=1}^{60} (k^2 + 4) = \sum_{k=1}^{60} k^2 + \sum_{k=1}^{60} 4 =$

$= \sum_{k=1}^{60} k^2 + 60 \times 4 = 240 + \sum_{k=1}^{60} k^2$

c) $\sum_{p=1}^{70} \frac{(p+4)^2}{6} - \sum_{p=1}^{70} \frac{(p-4)^2}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{(p+4)^2 - (p-4)^2}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{p^2 + 8p + 16 - p^2 + 8p - 16}{6} =$

$= \sum_{p=1}^{70} \frac{16p}{6} = \frac{8}{3}\sum_{p=1}^{70} p$

d) $\sum_{n=1}^{80} (3^{n+1} - 2^{n+2}) - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} 3^{n+1} - \sum_{n=1}^{80} 2^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} (3 \times 3^n) - \sum_{n=1}^{80} (4 \times 2^n) - 2\sum_{n=1}^{80} 3^n +$

$+ 3\sum_{n=1}^{80} 2^n = 3\sum_{n=1}^{80} 3^n - 4\sum_{n=1}^{80} 2^n -$

$- 2\sum_{n=1}^{80} 3^n + 3\sum_{n=1}^{80} 2^n = \sum_{n=1}^{80} 3^n - \sum_{n=1}^{80} 2^n =$

$= \sum_{n=1}^{80} (3^n - 2^n)$

5. **a)** 13

b) $\frac{1}{4}$

6. Média = 1,6 horas; o Pedro não cumpriu as recomendações da mãe.

7. **a)** 10,2 km

b) 204 km

8. **a)** 1,89 m

b) 1,86 m

9. **a)** 27 dias

b) 270 páginas

c) 10 páginas

10. 9,5 segundos

11. **a)** 15,2 °C

b) 59 °F

12. **a)** 8,03 m

b)

x_i	d_i
8,02	–0,01
7,92	–0,11
8,11	0,08
8,03	0
7,95	–0,08
8,06	0,03
7,97	–0,06
8,08	0,05
8,11	0,08
8,03	0
7,99	–0,04
8,09	0,06

13. **a)** –0,1 litros

b) 6,3 litros

c) 63 litros

14. **a)** 20 000 000

b) $1{,}15^2 \times 20\,000\,000 = 26\,450\,000$

15. **a)** 15

b) 1,69

16. **a)** 200

b) 1,6

c) 0,4

17.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - y_i^2)}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} =$$

$$= \frac{SS_x + n\,\bar{x}^2 - SS_y - n\,\bar{y}^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = \frac{n\,\bar{x}^2 - n\,\bar{y}^2}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} =$$

$$= \frac{n\,(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{\bar{x}^2 - \bar{y}^2} = n$$

18. **a)** $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{16}$

19. **a)** 25%

b) 4%

20. **a)** 36

b) 16

c) 9

d) 6

e) 24

21. **a)** 3

b) 15

22. Tem-se $1 = 11{,}4 - 8 \times 1{,}3$

A proporção de alunos cujas classificações não pertencem ao intervalo $[\bar{x} - 8\,s_x\,, \bar{x} + 8\,s_x]$ é inferior a $\frac{1}{64}$.

Portanto, o número de alunos com classificação inferior a 1 é menor do que $\frac{120}{64}$.

Como $\frac{120}{64} = 1{,}875$, houve, no máximo, um aluno com classificação inferior a 1.

23. **a)** 14

b) 20

c) 37

24. Primeiro quartil = $P_{25} \approx 9{,}568$

$P_{95} \approx 11{,}176$

Interpretação:

- aproximadamente 25% dos jogadores percorreram uma distância inferior ou igual a 9568 metros;
- aproximadamente 95% dos jogadores percorreram uma distância inferior ou igual a 11 176 metros.