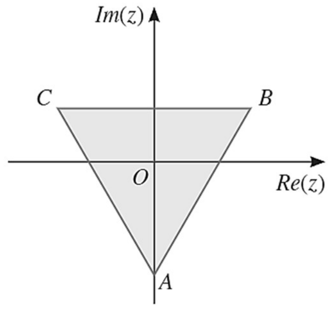
Nome do aluno	Nº	Data / / 20

Números complexos e transformações geométricas



1. Na figura seguinte está representado, no plano complexo, um triângulo cujos vértices são os pontos afixos das raízes cúbicas de um número complexo w. sabe-se que as coordenadas de A são $(0, -2)$.

1.1. Determine w.

1.2. Defina por uma função em $\mathbb{C}$ a translação que transforma A em B.

1.3. O triângulo $[ABC]$ tem simetrias de rotação. Defina-as como funções em $\mathbb{C}$.

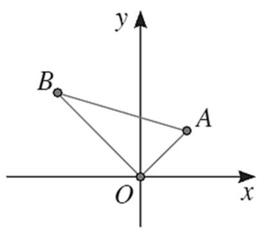
2. Considere os números complexos $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 + 6i$, $z_3 = 7 + 3i$ e $z_4 = 4$ e a função definida em $\mathbb{C}$ por $f(z) = iz$.

2.1. Represente no plano os afixos de z_1, z_2, z_3 e z_4, bem como os afixos das suas imagens por f.

2.2. Identifique a transformação do plano complexo definida pela função f.

3. Na figura seguinte está representado um triângulo $[OAB]$ retângulo em O. Sabe-se que:

- Os pontos A e B são os afixos de $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e z_2, respetivamente.
- A área do triângulo $[OAB]$ é igual a 4.



3.1. Determine as coordenadas de B.

3.2. Represente no plano complexo a imagem de $[OAB]$ pela transformação definida por $f(z) = 2\bar{z}$ e determine a sua área.

4. Para cada uma das seguintes funções indique se se trata de uma translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante ou homotetia (interpretando-as como transformações do plano complexo) e construa a imagem do afixo M de um número complexo genérico $z = x + yi$.

4.1. $f(z) = z + 2 + 3i$

4.2. $g(z) = \bar{z}$

4.3. $h(z) = -3iz$

4.4. $t(z) = \bar{z} + 5$

5. Construa a imagem do triângulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$ por cada uma das transformações indicadas no exercício anterior.

Soluções

1.

1.1.

A é afixo do complexo $z_A = -2i$

$w = z_A^3 = (-2i)^3 = -8 \times i^3 = 8i = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$

1.2.

As raízes cúbicas de w são da forma : $\sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2$

$z_B = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_C = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$, $z_A = 2e^{\frac{i3\pi}{2}}$ e os seus afixos correspondem aos pontos B , C e A , respetivamente.

$z_B = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $t(z) = z + \sqrt{3} + 3i$ é a translação que transforma A em B .

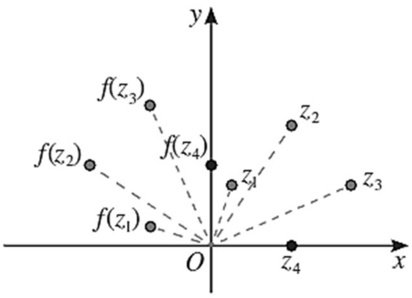
1.3.

$r_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $r_1(z) = ze^{\frac{i2\pi}{3}}$

$r_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $r_2(z) = ze^{\frac{i4\pi}{3}}$

2.

2.1.



2.2.

Rotação de centro na origem e ângulo orientado de medida $\frac{\pi}{2}$.

3.

3.1.

$A_{[AOB]} = 4 \Leftrightarrow \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \times \overline{BO}}{2} = 4 \Leftrightarrow |z_2| = 4$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo, um argumento de z_1 pode ser $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Assim, um argumento de z_2 será: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

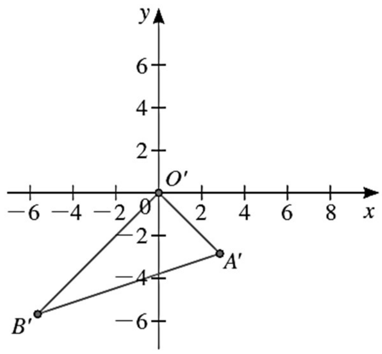
$z_2 = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{4\sqrt{2}}{2}i = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

$B(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

3.2.

$$f(z_0) = 2 \times \overline{z_0} = 2 \times \overline{0} = 0$$
$$f(z_1) = 2 \times \overline{z_1} = 2 \times (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$$
$$f(z_2) = 2 \times (-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i$$

$$\overline{z_0 z_1} = |2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i| = \sqrt{16} = 4 \quad \overline{z_0 z_1} = |-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i| = \sqrt{64} = 8$$
$$A = \frac{4 \times 8}{2} = 16 \text{ cm}^2$$



4.

4.1. translação de vetor $\vec{u}\,(2, 3)$.

4.2. reflexão de eixo coincidente com o eixo real.

4.3.

Rotação de centro na origem e ângulo de medida $\frac{3\pi}{2}$ rad composta com a homotetia de centro na origem e razão 3 .

4.4. reflexão deslizante de eixo real e vetor $\vec{v}\,(5, 0)$

5.