Nome do aluno | Nº | Data / / 20

## Convergência e limitação

**1.** Considere a sucessão $(u_n)$ de termo geral:

$$u_n = \frac{5+6n}{2n}$$

**1.1.** Mostre que $u_n \to 3$.

**1.2.** Determine quantos termos de $(u_n)$ não pertencem à vizinhança 0,2 de 3.

**1.3.** Indique um majorante e um minorante de $(u_n)$.

**2.** Mostre que a sucessão de termo geral

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$$

converge para 3 e não é monótona.

**3.** Justifique que a sucessão $(a_n)$ definida por $a_n = \frac{2-n}{3+2n}$ é convergente.

**4.** Considere as sucessões definidas por:

$$u_n = \frac{5}{n+3} \qquad v_n = \cos^2(n+1)$$

**4.1.** Mostre que $u_n \to 0$.

**4.2.** Indique, justificando, $\lim(u_n v_n)$.

**Soluções**

**1.**

**1.1.**

Por definição, $u_n \to 3$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$.

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição $|u_n - 3| < \delta$ é equivalente a $\left|\frac{5}{2n}\right| < \delta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $\frac{5}{2n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{5}{2\delta}$.

Conclui-se, então, que a condição $|u_n - 3| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução $S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{5}{2\delta}, +\infty\right[$.

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n \to 3$.

**1.2.**

$$|u_n - 3| \geqslant 0{,}2 \Leftrightarrow \left|\frac{5+6n}{2n} - 3\right| \geqslant 0{,}2 \Leftrightarrow \left|\frac{5}{2n}\right| \geqslant 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2n} \geqslant 0{,}2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow n \leqslant \frac{5}{0{,}4} \Leftrightarrow n \leqslant 12{,}5$$

Então, existem $12$ termos de $(u_n)$ que não pertencem à vizinhança $0{,}2$ de $3$.

**1.3.**

Tem-se que $\frac{5+6n}{2n} = 3 + \frac{5}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{5}{2n} \leqslant \frac{5}{2} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 3 < 3 + \frac{5}{2n} \leqslant \frac{11}{2}$$

Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 3]$

Conjunto dos majorantes: $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$

Logo, por exemplo, $3$ é um minorante de $(u_n)$ e $\frac{11}{2}$ é um majorante de $(u_n)$.

**2.**

Por definição, $u_n \to 3$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$.

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição $|u_n - 3| < \delta$ é equivalente a $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \delta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para todos os termos, tem-se que $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$.

Conclui-se, então, que a condição $|u_n - 3| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução $S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{1}{\delta}, +\infty\right[$.

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n \to 3$.

Monotonia:

$$u_1 = 3 + \frac{(-1)^1}{1} = 2\ ;\ u_2 = 3 + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{7}{2}\ ;\ u_3 = 3 + \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Como $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$, a sucessão não é monótona.

**3.**

Como

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2-(n+1)}{3+2(n+1)}-\frac{2-n}{3+2n}=\frac{7}{(2n+5)(2n+3)}<0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$(a_n)$ é monótona decrescente e, como tal, $a_1=\frac{1}{5}$ é majorante.

$$\frac{2-n}{3+2n}=\frac{-n+2}{2n+3}=\frac{-n+2}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}n+1}{n+\frac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{r|l} -\frac{1}{2}n+1 & n+\frac{3}{2} \\ \cline{2-2} \frac{1}{2}n+\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \cline{1-1} \frac{7}{4} & \end{array}$$

Como $a_n=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{4}}{n+\frac{3}{2}}$ , tem-se:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{\frac{7}{4}}{n+\frac{3}{2}}>0\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>-\frac{1}{2}$$

Logo, $-\frac{1}{2}$ é minorante de $(a_n)$ .

Portanto, pelo teorema sobre sucessões monótonas e limitadas e convergência, $(a_n)$ é convergente.

**4.**

**4.1.**

Por definição, $u_n\to 0$ se, e somente se, para todo o $\delta>0$ , existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ , tal que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant p\Rightarrow|u_n-0|<\delta$ .

Considerando um número real $\delta>0$ , a condição $|u_n-0|<\delta$ é equivalente a $\left|\frac{5}{n+3}\right|<\delta$ , para todo o $n\in\mathbb{N}$ .

Tem-se que $\frac{5}{n+3}<\delta\Leftrightarrow n>\frac{5-3\delta}{\delta}$ .

Conclui-se, então, que a condição $|u_n-0|<\delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução $S=\mathbb{N}\cap\left]\frac{5-3\delta}{\delta},+\infty\right[$ .

Assim, considerando $p=\min S$ , tem-se:

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant p\Rightarrow|u_n-0|<\delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n\to 0$ .

**4.2.**

$\lim(u_n\,v_n)=0$ , porque é o limite do produto de uma sucessão que tende para zero, $(u_n)$ , por uma sucessão limitada, $(v_n)$ .