Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função

1. Considere as funções definidas analiticamente por:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1} \qquad e \qquad g(x) = \frac{2-x^2}{x^2-1}$$

Determine o domínio de cada uma e estude a existência de assíntotas horizontais ao gráfico de casa uma das funções.

2. Estude cada função seguinte quanto á existência de assíntotas ao seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.1. $a(x) = 2 + \frac{1}{x}$

2.2. $b(x) = \frac{2}{x-1}$

2.3. $c(x) = \frac{2-x}{x-4}$

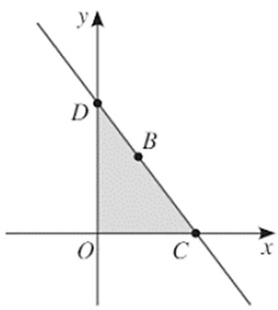
2.4. $d(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

2.5. $e(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

2.6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2.7. $g(x) = \frac{2x}{|x|-1}$

3. Considere o ponto B que, em determinado referencial o.n. do plano xOy, tem coordenadas $(1,2)$. Sejam C e D os pontos de coordenadas $(x,0)$, $x > 1$ e $(0,y)$, tais que B, C e D são colineares.



3.1. Escreva y em função de x.

3.2. Mostre que a área A do triângulo $[OCD]$ é dada em função de x por:

$$A(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$$

3.3. Com o auxílio da calculadora gráfica represente o gráfico de A e indique para que valor de x a área do triângulo é mínima.

4. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+1}$$

4.1. Determine o domínio de f.

4.2. Escreva $f(x)$ na forma $ax + b + \frac{k}{x+1}$.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, contínua, tal que:

- $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (g(x) - x) = 0$

Esboce a representação gráfica de uma função que cumpra as condições indicadas.

6. Prove que a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota, em $+\infty$ e em $-\infty$, ao gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

Soluções

1.

Função f:

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

Tem-se que a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f.

Função g:

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2-x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2-x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Tem-se que a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g.

2.

2.1.

$D_a = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Calculem-se os limites laterais no ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} a(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} a(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 + (+\infty) = +\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} a(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

Tem-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical e a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função a.

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.2.

$D_b = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Calculem-se os limites laterais no ponto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} b(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} b(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} b(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} b(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Tem-se que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical e a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função b .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.3.

$D_c = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

Calculem-se os limites laterais no ponto $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4^-} c(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{2 - x}{x - 4} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} c(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{2 - x}{x - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} c(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x}{x - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} c(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{x - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Tem-se que a reta de equação $x = 4$ é assíntota vertical e a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função c .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{4\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.4.

$D_d = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$

Calculem-se os limites nos pontos $x = -2$ e $x = 2$:

$$\lim_{x \to -2^-} d(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} d(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2} d(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} d(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} d(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Tem-se que a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical e a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função d .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.5.

$D_e = [3, +\infty[$

Calcule-se o limite lateral no ponto $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^+} e(x) = \lim_{x \to 3^+} -\frac{1}{\sqrt{x - 3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Basta calcular o limite à direita de 3 porque a função não está definida para valores inferiores a 3 .

Calcule-se o limite em $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} e(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x - 3}}\right) = 0$$

Tem-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical e a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função e .

Como a função é contínua em $]3, +\infty[$, não existem mais assíntotas verticais.

2.6.

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Calculem-se os limites laterais no ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 1$$

Tem-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical e as retas de equações $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função f .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.7.

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Calculem-se os limites laterais nos pontos $x = -1$ e $x = 1$:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{|x|-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{|x|-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{|x|-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{|x|-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{|x|-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{|x|-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Tem-se que as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais e as retas de equações $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função g .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, não existem mais assíntotas verticais.

3.

3.1.

$\overrightarrow{BC}$ é colinear com $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BC} = (C - B)(x - 1, -2)$

$\overrightarrow{BD} = (D - B)(-1, y - 2)$

Como são colineares, tem-se:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{-2}{y-2} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

3.2.

A área é dada por $\frac{x \times y}{2}$, então, $A(x) = \frac{x \times \frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{x^2}{x-1}$.

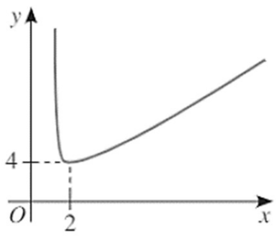
Utilizando o algoritmo da divisão, tem-se que:

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1$$

Logo:

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

3.3.



A área é mínima para $x = 2$.

4.

4.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

4.2.

Aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & -1 \\ -1 & & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{-2} \end{array}$$

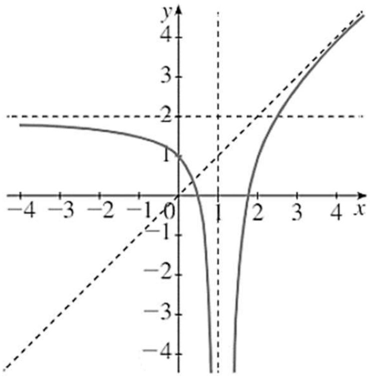
$$2x^2 + 3x - 1 = (x+1)(2x+1) - 2$$

Então:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)(2x+1) - 2}{x+1} =$$
$$= \frac{(x+1)(2x+1)}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = 2x + 1 + \frac{-2}{x+1}$$

5.

Por exemplo:



6.

Para provar que a reta de equação $y = x - 2$ é assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$, basta mostrar que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0$$

Tem-se que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x - 2) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 2} - x - 2 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 2x - 2x + 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x - 2} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

De igual modo:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x - 2) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x - 2} - x - 2 \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 2x - 2x + 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - 2} = \frac{4}{-\infty} = 0$$