

Nome do aluno

Nº

Data

/ / 20

Segunda derivada e cinemática

1. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica cuja unidade é o metro. A abcissa (nessa reta) da respetiva posição nesse instante t , em segundos, é dada por:

$$p(t) = 4t^2 + 20t$$

- 1.1. Determine a velocidade média entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
- 1.2. Calcule a velocidade no instante $t = 2$.
- 1.3. Supondo que a partícula esteve em movimento entre os instantes $t = 0$ e $t = 8$, qual é a velocidade máxima atingida? Qual é a aceleração da partícula nesse instante?

2. Um projétil foi lançado verticalmente a partir de um avião e a sua altura a (em metros) em função do tempo (em segundos) decorrido após o lançamento é dada por:

$$a(t) = -5t^2 + 100t + 1500$$

Determine:

- 2.1. A altura máxima atingida pelo projétil.
- 2.2. A velocidade média do projétil nos primeiros 5 segundos.
- 2.3. A velocidade no instante em que atingiu o solo.

3. A velocidade v de um carrinho telecomandado, em metros por segundo, é dada, em função do tempo t , em segundos, por:

$$v(t) = 2t(3t - t^2), \quad t \in [0, 3]$$

Sabe-se que:

- O carrinho se move em linha reta;
- A posição do carrinho no instante $t = 0$ é a origem dos espaços.

Determine:

- 3.1. Uma expressão para a aceleração do carrinho durante o seu percurso.
- 3.2. A velocidade do carrinho quando a aceleração se anula e justifique que esta é a velocidade máxima atingida por este neste percurso.
- 3.3. Uma expressão para a função posição do carrinho.

4. Dois pontos M_1 e M_2 movem-se numa reta numérica cuja unidade de medida é o metro, sendo a função posição de cada um descrita em função do tempo t , em segundos, por:

$$x_1(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$$

$$x_2(t) = 3t^3 - 10t^2 + 8$$

Respetivamente.

- 4.1. Determine a aceleração do ponto M_1 , em km/h^2 , aos 60 s.
- 4.2. Determine o(s) instante(s) em que os dois pontos têm a mesma aceleração e determine, nesse(s) instante(s), a velocidade de cada um e a distância entre os dois.
- 4.3. Além do instante inicial, existe um outro instante em que os dois objetos têm a mesma velocidade. Determine-o.

Soluções

1.

1.1.

$$v_m = \frac{p(2) - P(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow v_m = \frac{4 \times 4 + 20 \times 2}{2} \Leftrightarrow v_m = 28 \text{ m/s}$$

1.2.

$$p'(t) = 8t + 20$$

$$p'(2) = 8 \times 2 + 20 = 36 \text{ m/s}$$

1.3.

A função $p'(t)$ é crescente, pelo que a velocidade máxima será atingida no instante $t = 8$.

$$p'(8) = 8 \times 8 + 20 \Leftrightarrow p'(8) = 84 \text{ m/s}$$

$$p''(t) = 8$$

$$p''(8) = 8 \text{ m/s}^2$$

2.

2.1.

$$a'(t) = -10t + 100$$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 10$$

	0		10	$+\infty$
$a'(t)$	+	+	0	-
a	\nearrow	\nearrow	Máx.	\searrow

$$a(10) = 2000$$

O projétil atinge a altura máxima de 2000 m aos 10 segundos.

2.2.

$$v_m = \frac{a(5) - a(0)}{5 - 0} = \frac{1875 - 1500}{5} = 75 \text{ m/s}$$

2.3.

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 100t + 1500 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \times (-5) \times 1500}}{2 \times (-5)} \Leftrightarrow t = -10 \vee t = 30$$

O projétil atinge o solo aos 30 segundos.

$$a'(30) = -10 \times 30 + 100 \Leftrightarrow a'(30) = -200 \text{ m/s}$$

3.

$$v(t) = 2t(3t - t^2), t \in [0, 3]$$

$$v(t) = 6t^2 - 2t^3$$

3.1.

$$v'(t) = 2(3t - t^2) + 2t(3 - 2t) \Leftrightarrow v'(t) = 6t - 2t^2 + 6t - 4t^2 \Leftrightarrow v'(t) = 12t - 6t^2$$

3.2.

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t(12 - 6t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$$

A aceleração é nula nos instantes 0 e 2.

Determinemos a velocidade do carrinho quando $t = 2$:

$$v(2) = 2 \times 2 \times (3 \times 2 - 2^2) = 8 \text{ m/s}$$

	0		2		3
$v'(t)$	0	+	0	-	-18
v	0	↗	8	↘	0

v é crescente em $[0, 2]$ e decrescente em $[2, 3]$, atingindo um máximo quando $t = 2$, pelo que a velocidade máxima é 8 m/s.

3.3.

$$e(t) = 2t^3 - \frac{t^4}{2} + c$$

$$e(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$e(t) = 2t^3 - \frac{t^4}{2}$$

4.

4.1.

$$x'_1(t) = 3t^2 - 8t$$

$$x''_1(t) = 6t - 8$$

$$x''_1(60) = 6 \times 60 - 8 = 352 \text{ m/s}^2$$

$$0,352 \times 3600 \times 3600 = 4\,561\,920 \text{ km/h}^2$$

4.2.

$$x'_2(t) = 9t^2 - 20t$$

$$x''_2(t) = 18t - 20$$

$$x''_1(t) = x''_2(t) \Leftrightarrow 6t - 8 = 18t - 20 \Leftrightarrow 12 = 12t \Leftrightarrow t = 1$$

$$x'_1(1) = 3 \times 1^2 - 8 \times 1 \Leftrightarrow x'_1(1) = -5 \text{ m/s}$$

$$x'_2(1) = 9 \times 1^2 - 20 \times 1 \Leftrightarrow x'_2(1) = -11 \text{ m/s}$$

$$x_1(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 + 5 \times 1 \Leftrightarrow x_1(1) = 2 \text{ m}$$

$$x_2(1) = 3 \times 1^3 - 10 \times 1^2 + 8 \Leftrightarrow x_2(1) = 1 \text{ m}$$

Os dois móveis têm a mesma aceleração no instante $t = 1$.

Nesse instante, M_1 tem uma velocidade de -5 m/s e M_2 de -11 m/s e encontram-se a uma distância de um metro.

4.3.

$$x'_1(t) = x'_2(t) \Leftrightarrow 3t^2 - 8t = 9t^2 - 20t \Leftrightarrow -6t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6t(t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$$