Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Definição de limite

1. Considere a sucessão de termo geral:

$$u_n = \frac{1}{n}$$

1.1. Calcule u_1, u_{10}, u_{500} e $u_{10\,000}$.

1.2. Determine uma ordem a partir da qual:

1.2.1. $|u_n| < 0{,}0001$

1.2.2. $|u_n| < 0{,}00003$

1.3. Prove que $u_n \to 0$.

2. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{3n+1}{n}$$

2.1. Determine uma ordem, $p \in \mathbb{N}$, a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) verificam a condição:

$$|u_n - 3| < 0{,}001$$

2.2. Prove, utilizando a definição, que $u_n \to 3$.

2.3. Determine o conjunto solução da condição $|u_n - 3{,}1| < 0{,}001$ e conclua que 3,1 não é limite de u_n.

3. Averigue quais das sucessões seguintes são progressões geométricas:

3.1. $a_n = -3 \times 2^n$

3.2. $b_n = \frac{3}{2n}$

3.3. $c_n = 3^{1-2n}$

3.4. $d_n = 3 - 2^n$

4. Prove, por definição, que as sucessões definidas pelos termos gerais seguintes tendem para -2.

4.1. $a_n = -2 - \frac{2}{n}$

4.2. $b_n = \frac{1-2n}{n}$

Soluções

1.

1.1.

$$u_1 = 1\ ;\ u_{10} = \frac{1}{10}\ ;\ u_{500} = \frac{1}{500}\ ;\ u_{10\,000} = \frac{1}{10\,000}$$

1.2.

1.2.1.

$$|u_n| < 0{,}0001 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}0001 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0{,}0001 \Leftrightarrow n > 10\,000$$

A partir da ordem $10\,000$, exclusive, ou $10\,001$, inclusive.

1.2.2.

$$|u_n| < 0{,}00003 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}00003 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0{,}00003 \Leftrightarrow n > 33\,333{,}(3)$$

A partir da ordem $33\,334$, inclusive.

1.3.

Por definição $u_n \to 0$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta$$

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição

$$|u_n| < \delta$$

é equivalente a

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Conclui-se, então, que a condição $|u_n| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução

$$S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{1}{\delta}, +\infty\right[$$

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n \to 0$.

2.

2.1.

Tem-se que:

$$\left|\frac{3n+1}{n} - 3\right| = \frac{1}{n}$$

Como $\frac{1}{n} < 0{,}001 \Leftrightarrow n > 1000$, basta escolher uma ordem superior a 1000, por exemplo, 1001, para que isso aconteça, uma vez que, para todo o natural n, $n \geqslant 1001 \Rightarrow |u_n - 3| < 0{,}001$.

2.2.

Por definição, $u_n \to 3$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$.

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição $|u_n - 3| < \delta$ é equivalente a $\left|\frac{1}{n}\right| < \delta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $\frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$.

Conclui-se, então, que a condição $|u_n - 3| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$

e tem como conjunto solução $S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{1}{\delta}, +\infty\right[$.

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n \to 3$.

2.3.

$$|u_n - 3{,}1| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{3n+1}{n} - 3{,}1\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - 0{,}1n}{n}\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |1 - 0{,}1n| < 0{,}001n \Leftrightarrow -0{,}001n < 1 - 0{,}1n \wedge 1 - 0{,}1n < 0{,}001n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}001n + 0{,}1n < 1 \wedge -0{,}1n - 0{,}001n < -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}099n < 1 \wedge -0{,}011n < -1 \Leftrightarrow n < 10{,}101 \wedge n > 90{,}91 \text{ (Impossível)}$$

Conclui-se, assim, que não existe nenhuma ordem para a qual $|u_n - 3{,}1| < 0{,}001$ e, portanto, $3{,}1$ não é limite da sucessão considerada.

3.

3.1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-3 \times 2^{n+1}}{-3 \times 2^n} = 2$$

É uma progressão geométrica, pois o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante.

3.2.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{3}{2(n+1)}}{\frac{3}{2n}} = \frac{2n}{2(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Não é uma progressão geométrica.

3.3.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3^{1-2(n+1)}}{3^{1-2n}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

É uma progressão geométrica.

3.4.

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{3 - 2^{n+1}}{3 - 2^n}$$

Para $n = 1$, obtém-se $\frac{3-2^2}{3-2} = -1$; e para $n = 2$, obtém-se $\frac{3-2^3}{3-2^2} = 5$.

Logo, não é uma progressão geométrica.

4.

4.1.

Por definição, $a_n \to -2$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |a_n + 2| < \delta$.

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição $|a_n + 2| < \delta$ é equivalente a $\left|-\frac{2}{n}\right| < \delta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $\frac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$.

Conclui-se, então, que a condição $|a_n + 2| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução $S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{2}{\delta}, +\infty\right[$.

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |a_n + 2| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $a_n \to -2$.

4.2.

Por definição, $b_n \to -2$ se, e somente se, para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |b_n + 2| < \delta$.

Considerando um número real $\delta > 0$, a condição $|b_n + 2| < \delta$ é equivalente a $\left|\frac{1}{n}\right| < \delta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $\frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$.

Conclui-se, então, que a condição $|b_n + 2| < \delta$ é possível em $\mathbb{N}$ e tem como conjunto solução $S = \mathbb{N} \cap \left]\frac{1}{\delta}, +\infty\right[$.

Assim, considerando $p = \min S$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |b_n + 2| < \delta$$

Fica, assim, provado, por definição, que $b_n \to -2$.