Assíntotas verticais ao gráfico de uma função

1. Determine, caso existam, equações das assíntotas verticais aos gráficos das seguintes funções:

   1.1. $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$

   1.2. $g(x) = \frac{2}{x^2-1}$

   1.3. $h(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

   1.4. $f(x) = \frac{-1+\sqrt{x-1}}{x}$

   1.5. $g(x) = \frac{x-2}{|x|-2}$

   1.6. $h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} & se\ x > 0 \\ x^2 & se\ x \leq 0 \end{cases}$

2. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, contínua, em que 1 é o único zero.

   Seja g, definida por:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f^2(x)}$$

   Justifique que:

   2.1. $D_g = \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$

   2.2. g é contínua.

   2.3. A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Soluções

1.

1.1.

Esta função é contínua, uma vez que é racional e o único ponto aderente ao seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, que não lhe pertence, é o ponto 2.

Calculem-se os limites laterais:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Assim, tem-se que a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico da função f.

1.2.

Esta função é contínua, uma vez que é racional e os únicos pontos aderentes ao seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, que não lhe pertencem, são os pontos -1 e 1.

Calculem-se os limites laterais:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim, tem-se que as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função g.

1.3.

Esta função é contínua, uma vez que é racional e os únicos pontos aderentes ao seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$, que não lhe pertencem, são os pontos -3 e 3.

Calculem-se os seguintes limites:

$$\lim_{x \to -3^-} h(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} h(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

Assim, tem-se que a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico da função h.

1.4.

$D_f = [1, +\infty[$

Como a função f é contínua no seu domínio, não tem assíntotas verticais.

1.5.

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$

Calculem-se os seguintes limites:

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x-2}{-x-2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x-2}{-x-2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

Assim, tem-se que a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico da função g .

1.6.

$D_h = \mathbb{R}$

Calculem-se os limites laterais no ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{3}{x}\right) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função h .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, não existem mais assíntotas verticais.

2.

2.1.

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 0 \wedge f^2(x) \neq 0\} = [0, +\infty[\cap \{1\} = \mathbb{R}_0^+\backslash\{1\}$

2.2.

g é contínua porque é o quociente de duas funções contínuas.

2.3.

Como $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}}{f^2(x)} = \frac{\sqrt{1}}{0^+} = +\infty$, então, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .