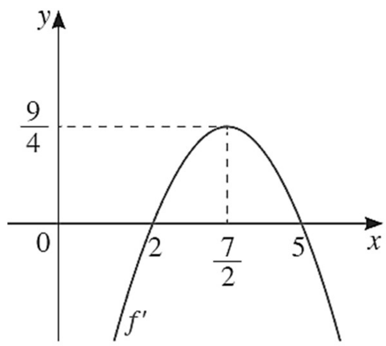
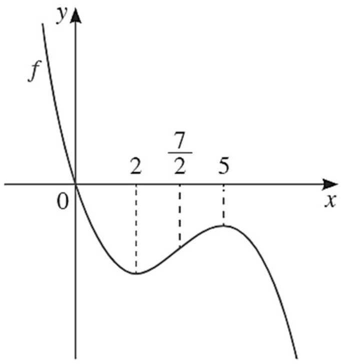
Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Segunda derivada e extremos relativos



1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f' de domínio $\mathbb{R}$.

Justifique que o gráfico da figura seguinte pode ser o gráfico de f.

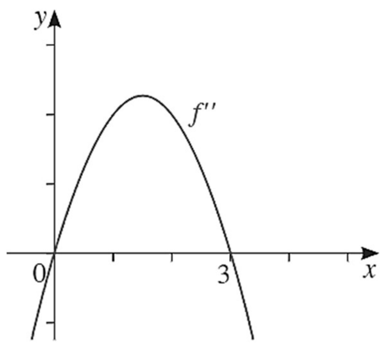


Na sua justificação deve referir-se à variação de sinal das funções f' e f'', relacionando-a com características da função f (monotonia, extremos relativos, sentido das concavidades do seu gráfico e pontos de inflexão).

2. No referencial da figura ao lado está representada graficamente a derivada de segunda ordem de uma função f de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- $f''(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \{0, 3\}$
- $f'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \{-1, 2, 4\}$

Estude f quanto à existência de extremos relativos.



3. Determine os extremos relativos das seguintes funções utilizando o teste da segunda derivada:

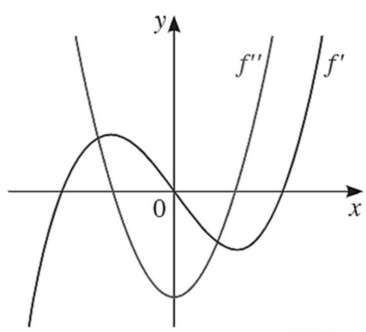
3.1. $f(x) = 9x^4 - 2x^3 - 6\mathrm{x}^2$

3.2. $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ em que a primeira e a segunda derivadas estão representadas graficamente na figura seguinte.

Sabe-se que os zeros de f' são $-2\sqrt{3}$, 0 e $2\sqrt{3}$ e os zeros de f'' são -2 e 2.

Esboce uma possível representação gráfica de f.



5. Seja f uma função ímpar e contínua de domínio $\mathbb{R}$. O quadro seguinte sintetiza o estudo do sinal de f' e de f'' no intervalo $[0, +\infty[$.

x	0		2		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Sabe-se ainda que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5.1. Indique os intervalos de monotonia de f.

5.2. Esboce uma possível representação gráfica de f.

6. Recorrendo a processos analíticos e utilizando a calculadora para eventuais cálculos numéricos, efetue o estudo completo de cada uma das seguintes funções e esboce o seu gráfico.

6.1. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

6.2. $g(x) = 3x^5 - 25x^3$

6.3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

7. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{2x^2}{9 - x^2}$$

Nas questões seguintes utilize apenas processos analíticos.

7.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

7.2. Prove que:

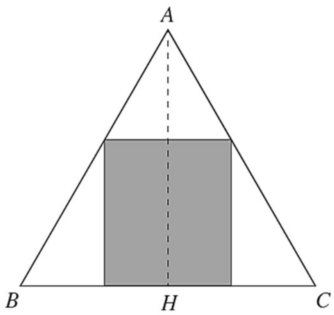
$$f'(x) = \frac{36x}{(9 - x^2)^2}$$

7.3. Estude f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

7.4. Indique o contradomínio de f.

8. Numas águas furtadas pretende-se abrir uma janela de área máxima. A janela deve ser aberta numa fachada em forma de triângulo isósceles e dois dos respetivos lados devem ser paralelos à base do triângulo, como se ilustra na figura ao lado.

Representando esta fachada por $[ABC]$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, determine as dimensões da janela em função da base $a = \overline{BC}$ e da altura $b = \overline{AH}$ do triângulo (onde H é o ponto médio do segmento de reta $[BC]$).



Soluções

1.

	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\nearrow$

f' é negativa em $]-\infty, 2[$ e em $]5, +\infty[$, pelo que, nesses intervalos, f é decrescente.
f' é positiva em $]2, 5[$, pelo que, nesse intervalo, f é crescente.

Da tabela, vê-se que f atinge um mínimo relativo em $x = 2$ e um máximo relativo em $x = 5$.

f' é crescente em $\left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$ (f'' será positiva nesse intervalo), pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

f' é decrescente em $\left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$ (f'' será sempre negativa nesse intervalo), pelo que f tem a concavidade voltada para baixo.

2.

Através da representarão gráfica de f'' , podemos concluir que $f''(-1) > 0$; $f''(2) > 0$ e $f''(4) < 0$.

$f'(-1) = 0$ e $f''(1) > 0$, logo, f admite um mínimo relativo em $x = -1$.
$f'(2) = 0$ e $f''(2) > 0$, logo, f admite um mínimo relativo em $x = 2$.
$f'(4) = 0$ e $f''(4) < 0$, logo, f admite um máximo relativo em $x = 4$.

3.

3.1.

f tem derivada de primeira ordem $f'(x) = 36x^3 - 6x^2 - 12x$ e derivada de segunda ordem $f''(x) = 108x^2 - 12x - 12$.

Calculando os zeros de f' , tem-se:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^3 - 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(36x^2 - 6x - 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 6x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{2}{3}$$

Assim, porque $f''(0) = -12 < 0$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 21 > 0$ e $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 28 > 0$,

podemos concluir que a função f admite um máximo relativo em $x = 0$

e um mínimo relativo em $x = -\frac{1}{2}$ e em $x = \frac{2}{3}$.

3.2.

g tem derivada de primeira ordem $g'(x) = x^2 - 5x + 6$ e derivada de segunda ordem $g''(x) = 2x - 5$.

Calculando os zeros de g' , tem-se:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} \Leftrightarrow$$

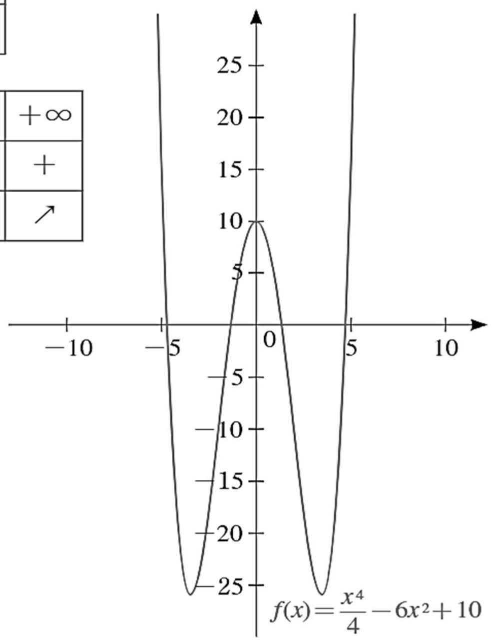
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Assim, porque $g''(2) = -1 < 0$, $g''(3) = 1 > 0$, podemos concluir que a função g admite um máximo relativo em $x = 2$ e um mínimo relativo em $x = 3$.

4.

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$		0	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	Mín.	$\nearrow$



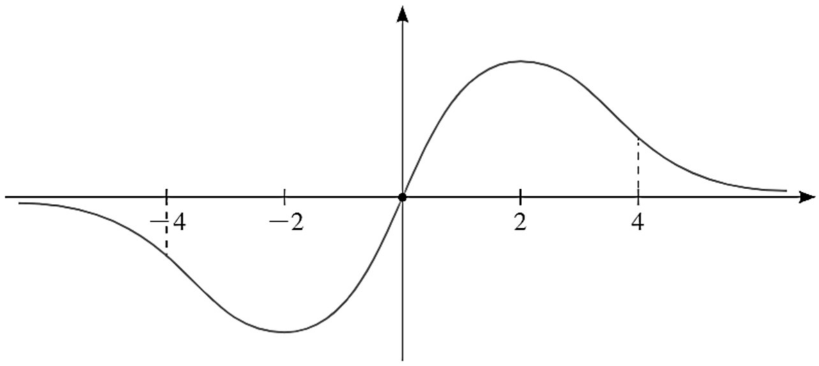
5.

5.1.

Em $[0, +\infty[$, f é crescente em $[0, 2]$ e f é decrescente em $[2, +\infty[$.
Como f é ímpar, podemos concluir que f é crescente em $[-2, 2]$ e f é decrescente em $[2, +\infty[$ e em $]-\infty, -2]$.

5.2.

f tem a concavidade voltada para cima em $[4, +\infty[$ e em $[-4, 0]$ e para baixo em $[0, 4]$ e em $]-\infty, -4]$.



6.

6.1.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Domínio:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Zeros:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \mathrm{x} \neq -2 \wedge x \neq 2$

Logo, $x = 0$ é o único zero.

Paridade:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -\dfrac{x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$

A função f é ímpar.

Assíntotas:

• Assíntotas verticais:

f é uma função racional, contínua no seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

Apenas as retas da equação $x = -2$ e $x = 2$ poderão ser assíntotas verticais do gráfico de f .

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Logo, $x = -2$ é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 4}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$x = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 4}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$x = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - x(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \wedge x^2 \neq -2 \wedge x^2 \neq 2$

equação impossível em $\mathbb{R}$.

$f'(x)$ não tem zeros. f não tem extremos.

Como $-x^2 - 4 = -(x^2 + 4) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $(x^2 - 4)^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, podemos concluir que f é decrescente em $]-\infty, -2[$, em $]-2, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2 - 4)^2 - (-x^2 - 4) \times 2(x^2 - 4) \times 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(-2x)(x^2 - 4) - (-x^2 - 4) \times 4x}{(x^2 - 4)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 8x - (-4x^3 - 16x)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{-2x^3 + 8x + 4x^3 + 16x}{(x^2 - 4)^3} = \frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3}$$

Para $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$:

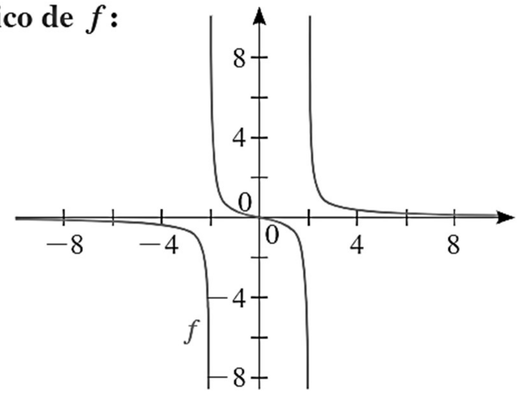
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 24x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$
f	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

Assim, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $[0, 2[$ e a concavidade voltada para cima em $]-2, 0]$ e em $]2, +\infty[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x = 0$.

Esboço do gráfico de f:



6.2.

$g(x) = 3x^5 - 25x^3$

Domínio:

A função g é polinomial, logo, é contínua de domínio $\mathbb{R}$.

Zeros:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^5 - 25x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Paridade:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ g(-x) = 3(-x)^5 - 25(-x)^3 \Leftrightarrow g(-x) = -3x^5 + 25x^3 = -g(x)$

A função g é ímpar.

Assíntotas:

A função g é contínua por ser polinomial e tem domínio $\mathbb{R}$.

Então, o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (3x^4 - 25x^2) = +\infty$, logo, o gráfico de g não tem assíntotas não verticais.

Monotonia e extremos:

$g'(x) = 15x^4 - 75x^2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 75x^2 = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	0	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Portanto, g é decrescente em $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$. É crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right]$ e em $\left[\sqrt{5}, +\infty\right[$.

g tem um mínimo relativo $g\left(\sqrt{5}\right) = -50\sqrt{5}$ e um máximo relativo $g\left(-\sqrt{5}\right) = 50\sqrt{5}$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$g''(x) = (15x^4 - 75x^2)' = 60x^3 - 150x$

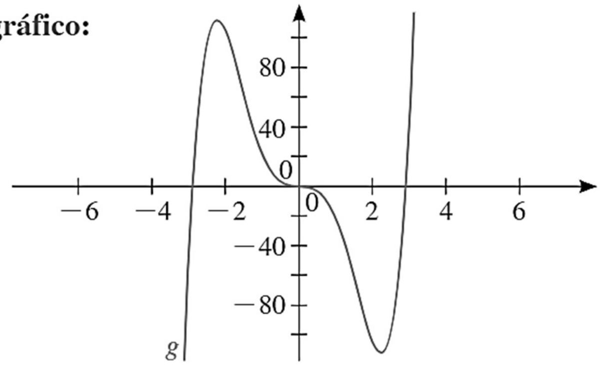
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 150x = 0 \Leftrightarrow x(60x^2 - 150) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee (60x^2 - 150) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 60x^2 = 150 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cap$	P.I.	$\cup$	0	$\cap$	P.I.	$\cup$

Esboço do gráfico:



6.3.

$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Domínio:

$D_h =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Zeros:

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Paridade:

$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = h(x)$

A função h é par.

Assíntotas:

A função h é contínua em todo o seu domínio, pelo que não tem assíntotas verticais.

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}\right) = 0$$

Logo, $y = x$ é assíntota ao gráfico de h , quando $x \to +\infty$.

Logo, $y = -x$ é assíntota ao gráfico de h , quando $x \to -\infty$.

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (h(x) + x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}\right) = 0$$

Monotonia e extremos:

$$h'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	0	$+$
h	$\searrow$	Mín.	Máx.	$\nearrow$

h é decrescente em $]-\infty, -1[$.

h é crescente em $[1, +\infty[$.

h tem um mínimo absoluto $h(-1) = h(1) = 0$.

Concavidades e pontos de inflexão:

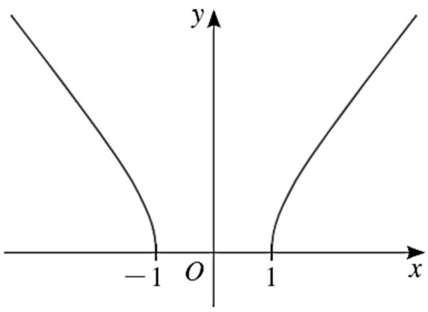
$$h''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1} = \frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$h''(x)$ não tem zeros.

$\sqrt{(x^2 - 1)^3} > 0$, pelo que $-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} < 0$.

Assim, h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$.

Esboço do gráfico:



7.

7.1.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x^2}{9 - x^2} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2x^2}{9 - x^2} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2}{9 - x^2} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2}{9 - x^2} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

$x = 3$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$, não admite outras assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{9 - x^2} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - 0x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{-x^2}\right) = -2$$

$y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

7.2.

$$f'(x) = \frac{(2x^2)' \times (9 - x^2) - (2x^2) \times (9 - x^2)'}{(9 - x^2)^2} = \frac{36x - 4x^3 + 4x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{36x}{(9 - x^2)^2}$$

7.3.

Para $x \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{36x}{(9 - x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$+$
f	↘	n.d.	↘	Mín.	↗	n.d.	↗

$f(0) = 0$

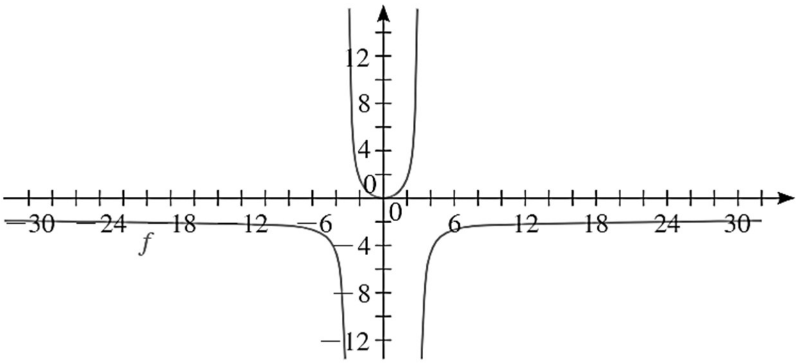
f é decrescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, 0]$.

f é crescente em $[0, 3[$ e em $]3, +\infty[$.

f atinge um mínimo relativo de coordenadas $(0, 0)$.

7.4.

Com os dados das alíneas anteriores, é possível construir um esboço do gráfico da função e concluir que $D'_f =]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.



8.

Seja h a altura da janela e x a base da janela. Tem-se que:

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{a-x} \Leftrightarrow h = \frac{b}{a}(a-x)$$

A área da janela é dada, em função de x, por:

$$A(x) = bx - \frac{b}{a}x^2, x \in]0, a[$$

$$A'(x) = b - \frac{2b}{a}x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$A''(x) = -\frac{2b}{a}$$

Logo: $A''\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{2b}{a} < 0$

A área da janela é máxima quando tem as dimensões $\frac{a}{2}$ de base e $\frac{b}{2}$ de altura.