Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Progressões geométricas

1. Considere a sucessão (a_n) definida por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n \times 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.1. Calcule os quatro primeiros termos de (a_n).

1.2. Justifique que (a_n) é uma progressão geométrica.

1.3. Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que:

$$a_n = 2 \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Escreva os quatro primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) e defina-a por recorrência, sabendo que:

2.1. $u_1 = 64$ e $r = \frac{1}{4}$

2.2. $u_1 = -3$ e $r = -2$

2.3. $u_1 = -2$ e $u_2 = 4$

3. Averigue quais das sucessões seguintes são progressões geométricas:

3.1. $a_n = -3 \times 2^n$

3.2. $b_n = \frac{3}{2n}$

3.3. $c_n = 3^{1-2n}$

3.4. $d_n = 3 - 2^n$

4. Uma cultura de bactérias aumenta 12% a cada dia que passa.
Qual é o quociente entre o número de bactérias num determinado dia e no dia anterior?

5. O valor comercial de uma máquina industrial é dado, em euros, em cada ano, pela progressão geométrica (v_n).
Sabendo que a sua razão é $0{,}96$, qual é a percentagem de desvalorização a cada ano que passa?

6. Para $x \in \mathbb{R}$, sejam $\frac{1}{2}$, x e $\frac{9}{8}$ os três primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n).

6.1. Determine o valor de x.

6.2. Determine a razão e u_5.

7. Determine um termo geral da progressão geométrica (u_n) e o valor de u_7, em que se sabe:

7.1. $u_1 = 10$ e $r = 5$

7.2. $u_1 = 14$ e $u_5 = 112$

7.3. $u_4 = 27$ e $u_{11} = \frac{128}{81}$

8. Um barco foi comprado novo por 30 000 euros. Por cada ano, após a sua compra, sofrerá uma desvalorização de 8%.
Determine o valor do barco 15 anos após a sua compra.
Apresente o valor em euros, arredondado à centésima.

9. Classifique quanto à monotonia as progressões geométricas (u_n) definidas por:

9.1. π^n

9.2. $3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

9.3. $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

9.4. $\frac{2^{n+2}}{6^n}$

10. Determine o temo geral da progressão geométrica (u_n), monótona, sabendo que $u_5 = 125$ e $u_{11} = \frac{1}{125}$.

11. Considere a progressão geométrica (u_n) em que $u_1 = -6$ e $r = 3$. Determine:

11.1. Um termo geral de (u_n).

11.2. A soma dos 10 primeiros termos.

12. Seja (a_n) a sucessão definida por

$$a_n = 2^{1-\frac{n}{2}}$$

12.1. Mostre que (a_n) é uma progressão geométrica e determine a sua razão.

12.2. Calcule o valor exato:

12.2.1. Da soma dos 12 primeiros termos.

12.2.2. De $a_5 + a_6 + \cdots + a_{12}$.

13. A Andreia estacionou o seu carro num local em que o placar informativo indica que o estacionamento de qualquer viatura custa na primeira hora 0,50 euros, aumentando 20% em cada hora que passa.
Se a Andreia deixar o seu carro no local durante 5 horas, quanto irá pagar no final?

Soluções

1.

1.1. $a_1 = 6$; $a_2 = 6 \times 3 = 18$; $a_3 = 18 \times 3 = 54$; $a_4 = 54 \times 3 = 162$

1.2.

(a_n) é uma progressão geométrica porque cada termo se obtém multiplicando o anterior por 3 (constante).

1.3.

Para $n = 1$, tem-se $a_1 = 2 \times 3^1 = 6$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times 3^n$.

Tese: $a_{n+1} = 2 \times 3^{n+1}$

Demonstração:

$$a_{n+1} = a_n \times 3$$

Por hipótese, obtém-se:

$$a_{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = 2 \times 3^{n+1}$$

Portanto, pelo princípio de indução, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2 \times 3^n$.

2.

2.1.

$u_1 = 64$, $u_2 = 64 \times \dfrac{1}{4} = 16$, $u_3 = 16 \times \dfrac{1}{4} = 4$ e $u_4 = 4 \times \dfrac{1}{4} = 1$;

$$\begin{cases} u_1 = 64 \\ u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.2.

$u_1 = -3$, $u_2 = -3 \times (-2) = 6$, $u_3 = 6 \times (-2) = -12$ e

$u_4 = -12 \times (-2) = 24$; $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = -2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2.3.

$r = \dfrac{4}{-2} = -2$; $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 4 \times (-2) = -8$ e

$u_4 = -8 \times (-2) = 16$; $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3.

3.1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-3 \times 2^{n+1}}{-3 \times 2^n} = 2$$

É uma progressão geométrica, pois o quociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante.

3.2.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{3}{2(n+1)}}{\frac{3}{2n}} = \frac{2n}{2(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Não é uma progressão geométrica.

3.3.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3^{1-2(n+1)}}{3^{1-2n}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

É uma progressão geométrica.

3.4.

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{3-2^{n+1}}{3-2^n}$$

Para $n=1$, obtém-se $\frac{3-2^2}{3-2}=-1$; e para $n=2$, obtém-se $\frac{3-2^3}{3-2^2}=5$.

Logo, não é uma progressão geométrica.

4.

Seja a o número de bactérias no 1.º dia e seja b o número de bactérias no 2.º dia. Então, $b=a+0{,}12a=1{,}12a$.

Logo, $\frac{b}{a}=\frac{1{,}12a}{a}=1{,}12$.

5.

Tem-se que $v_{n+1}=v_n\times 0{,}96$, então:

$$v_{n+1}-v_n=v_n\times 0{,}96-v_n=-0{,}04v_n$$

Portanto, a percentagem de desvalorização é de $4\ \%$.

6.

6.1.

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{8}}{x}\Leftrightarrow x^2=\frac{9}{16}\underset{x\in\mathbb{R}^-}{\Rightarrow}x=-\frac{3}{4}$$

6.2.

$$r=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}\ \text{ e }\ u_5=\frac{9}{8}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{81}{32}$$

7.

7.1.

$$u_n=10\times 5^{n-1}\ \text{ e }\ u_7=10\times 5^{7-1}=156\,250$$

7.2.

$$u_5=14\times r^4\Leftrightarrow\frac{112}{14}=r^4\Leftrightarrow r=\pm\sqrt[4]{8}$$

$$u_n=14\times\left(\sqrt[4]{8}\right)^{n-1}\ \text{ ou }\ u_n=14\times\left(-\sqrt[4]{8}\right)^{n-1}$$

$$u_7=14\times\left(\sqrt[4]{8}\right)^{7-1}=224\sqrt{2}$$

7.3.

$$u_{11}=27\times r^7\Leftrightarrow\frac{\frac{128}{81}}{27}=r^7\Leftrightarrow r=\sqrt[7]{\frac{128}{10287}}\Leftrightarrow r=\frac{2}{3}$$

$$u_4=u_1\times r^3\Leftrightarrow 27=u_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\Leftrightarrow u_1=\frac{27}{\frac{8}{27}}\Leftrightarrow u_1=\frac{729}{8}$$

$$u_n=\frac{729}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ \text{ e }\ u_7=\frac{729}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{7-1}=\frac{729}{8}\times\frac{64}{729}=8$$

8.

Seja (u_n) a sucessão do valor, em euros, do barco.

Assim, $u_{15}=u_1\times 0{,}92^{14}\approx 30\,000\times 0{,}3112\approx 9335{,}78$ €

9.

9.1. Monótona crescente, pois $r = \pi > 1$ e $u_1 > 0$.

9.2. Não monótona, pois $r = -\dfrac{2}{3} < 0$.

9.3. Monótona decrescente, pois $r = 2 > 1$ e $u_1 = -5 < 0$.

9.4.

Tem-se $\dfrac{2^{n+2}}{6^n} = \dfrac{2^{n+2}}{2^n \times 3^n} = \dfrac{4}{3^n} = 4 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Monótona decrescente, pois $0 < r = \dfrac{1}{3} < 1$ e $u_1 = \dfrac{4}{3} > 0$.

10.

$$u_{11} = u_5 \times r^6 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{125}}{125} = r^6 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{15\,625}} \Leftrightarrow r = \pm\frac{1}{5}.$$

Como a sucessão é monótona, a sua razão é positiva, ou seja, $r = \dfrac{1}{5}$.

Por outro lado:

$$u_5 = u_1 \times r^4 \Leftrightarrow 125 = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Leftrightarrow u_1 = \frac{125}{\frac{1}{625}} \Leftrightarrow u_1 = 78\,125$$

Assim, $u_n = 78\,125 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

11.

11.1. $u_n = -6 \times 3^{n-1}$

11.2.

$$S_{10} = -6 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = -6 \times \frac{-59048}{-2} = -177\,144$$

12.

12.1.

Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{1-\frac{n+1}{2}}}{2^{1-\frac{n}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12.2.

12.2.1.

$$S_{12} = a_1 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{63}{32(2-\sqrt{2})} = \frac{63\sqrt{2}}{64-32\sqrt{2}} = \frac{63\sqrt{2}(64+32\sqrt{2})}{(64-32\sqrt{2})(64+32\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}(64+32\sqrt{2})}{4096-2048} = \frac{63\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{64} = \frac{63\sqrt{2}+63}{32}$$

12.2.2.

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = S_{12} - S_4 =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \frac{\frac{3}{4}\sqrt{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \frac{3\sqrt{2}\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \frac{3\sqrt{2}\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-8} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \frac{3\sqrt{2}\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8} =$$

$$= \frac{63\sqrt{2}+63}{32} - \frac{48\sqrt{2}+48}{32} = \frac{15\sqrt{2}+15}{32}$$

13.

Seja (u_n) a sucessão do valor, em euros, a pagar por hora. A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 1{,}20$ e $u_1 = 0{,}50$.

Assim:

$$S_5 = 0{,}50 \times \frac{1-1{,}20^5}{1-1{,}20} = 0{,}50 \times \frac{1-2{,}48832}{1-1{,}20} =$$
$$= 0{,}50 \times 7{,}4416 = 3{,}7208$$

A Andreia irá pagar, aproximadamente, 3,72 € .