Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Funções contínuas

1. Averigue se as funções seguintes são contínuas em $x = 2$:

1.1. $f(x) = \frac{4x-1}{3x+2}$

1.2. $g(x) = 4x^3 - 5x + 1$

1.3. $h(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & se\ x > 2 \\ 2x - 2 & se\ x \leq 2 \end{cases}$

2. estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

2.1. $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x^2+1}, \quad em\ x = 1$

2.2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & se\ x > 4 \\ x + 2 & se\ x \leq 4 \end{cases}, \quad em\ x = 4$

2.3. $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ x = 0 \end{cases}, \quad em\ x = 0$

3. considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + k & se\ x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} & se\ x > 2 \end{cases}$$

Determine o valor de k para o qual a função é contínua.

4. Considere a função de domínio $[1, 8]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & se\ x \in [1, 5[\\ \frac{2x}{x + 2} & se\ x \in [5, 8] \end{cases}$$

4.1. Estude a continuidade de f.

4.2. Justifique que a restrição de f ao intervalo $[5, 8]$ é contínua.

5. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \qquad e \qquad g(x) = x - 5$$

5.1. Justifique que f e g são funções contínuas.

5.2. Justifique que também as funções $\frac{f}{g}$ e $\frac{g}{f}$ são contínuas.

6. Estude a continuidade das seguintes funções:

6.1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & se > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ \frac{x^2-x}{x} & se\ x < 0 \end{cases}$

6.2. $g(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x} & se\ x \geq 2 \\ \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} & se\ x < 2 \end{cases}$

7. Para cada uma das funções reais de variável real seguintes, determine o seu domínio e os seus zeros e justifique que é contínua:

7.1. $a(x) = \sin x + \cos x$

7.2. $b(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin}$

7.3. $c(x) = \frac{x - x^2}{\tan x}$

8. Estude a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ \sin x & se\ x < 0 \end{cases}$$

9. Para um certo número real a, considere a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2\cos x & se\ x \leq 0 \\ -x + a & se\ x > 0 \end{cases}$$

Determine o valor de a para o qual a função g é contínua.

10. Estude a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} & se\ x \in]0, 1] \\ 1 - \cos x & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

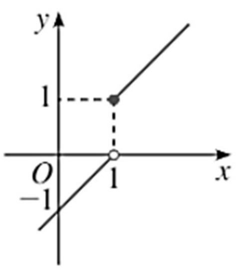
11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ x - 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

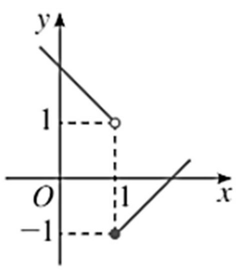
Seja g uma outra função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função $f \times g$ é contínua no ponto 1.

Indique, justificando, em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g.

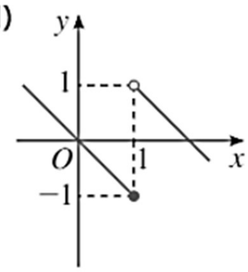
(I)



(II)



(III)



Soluções

1.

1.1.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{3x+2} = \frac{4\times 2-1}{3\times 2+2} = \frac{7}{8} \text{ e } f(2) = \frac{7}{8}$$

Então, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, ou seja, $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{7}{8}$, pelo que f é contínua em 2.

1.2.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(4x^3 - 5x + 1) = 4\times 2^3 - 5\times 2 + 1 = 23 \text{ e } g(2) = 23$$

Então, $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$, ou seja, $\lim_{x\to 2} g(x) = 23$, pelo que g é contínua em 2.

1.3.

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x-2) = 2\times 2 - 2 = 2 \text{ e } h(2) = 2.$$

Então, $\lim_{x\to 2^-} h(x) \neq \lim_{x\to 2^+} h(x) = h(2)$, ou seja, não existe $\lim_{x\to 2} h(x)$, pelo que h não é contínua em 2.

2.

2.1.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x}{x^2+1} = \frac{2\times 1 - 3\times 1}{1+1} = -\frac{1}{2} \text{ e } f(1) = -\frac{1}{2}$$

Então, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, ou seja, $\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$, pelo que f é contínua em 1.

2.2.

$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^-}(x+2) = 4+2 = 6$$

$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4^+}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4^+}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

$$g(4) = 6$$

Então, $\lim_{x\to 4^+} g(x) \neq \lim_{x\to 4^-} g(x) = g(4)$, ou seja, não existe $\lim_{x\to 4} g(x)$, pelo que g não é contínua em 4.

2.3.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1; \quad \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1 \text{ e } h(0) = 1$$

Então, $\lim_{x\to 0^-} h(x) \neq \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, ou seja, não existe $\lim_{x\to 0} h(x)$, pelo que h não é contínua em 0.

3.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-4} = \sqrt{2^2-4} = 0$$

Para que a função f seja contínua, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, ou seja:

$$\lim_{x\to 2^-} 5x^2 + k = 5\times 2^2 + k = 0$$

Portanto, $k = -20$.

4.

4.1.

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (-4x + 3) = -17$; $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{2x}{x+2} = \frac{10}{7}$

$f(5) = \frac{2 \times 5}{5+2} = \frac{10}{7}$

Então, $\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim_{x \to 5^+} f(x) = f(5)$, ou seja, não existe $\lim_{x \to 5} f(x)$, pelo que f não é contínua em $x = 5$ e, portanto, f é contínua em $D_f \backslash \{5\}$.

4.2.

Como existe $\lim_{x \to a} f(x), \forall a \in [5, 8]$, f é contínua em $[5, 8]$.

5.

5.1.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Então, f e g são contínuas.

Em alternativa, como f e g são funções polinomiais, logo, são contínuas.

5.2.

$\frac{f}{g}$ é contínua em $a \in D_{\frac{f}{g}}$ porque é o quociente de funções contínuas em a .

Analogamente, $\frac{g}{f}$ é contínua.

6.

6.1.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$

$f(0) = 0$

Então, $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, ou seja, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, pelo que f não é contínua em $\mathbb{R}$.

A restrição de f em $]-\infty, 0[$ é uma função polinomial e a restrição de f em $]0, +\infty[$ é uma função racional; logo, ambas são funções contínuas.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

6.2.

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2}{x} = -1$

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^2 - 2 \times 2 - 3}{2^2 - 5 \times 2 + 6} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$g(2) = -1$

Então, $\lim_{x \to 2^+} g(x) \neq \lim_{x \to 2^-} g(x) = g(2)$, ou seja, não existe $\lim_{x \to 2} g(x)$, pelo que g não é contínua no seu domínio $\mathbb{R} \backslash \{2\}$.

As restrições de g em $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$ são funções racionais, que são contínuas no seu domínio; logo, g é contínua em $\mathbb{R} \backslash \{2\}$.

7.

7.1.

$D_a = \mathbb{R}$

Zeros: $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A função é contínua, pois é a soma de duas funções contínuas.

7.2.

$D_b = \{x: 1 - \sin x \neq 0\} = \left\{x: x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Zeros: $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0 \underset{x \in D_b}{\Leftrightarrow} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A função é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas.

7.3.

$D_c = \left\{x: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \tan x \neq 0\right\} = \left\{x: x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Zeros: $\frac{x - x^2}{\tan x} = 0 \underset{x \in D_c}{\Leftrightarrow} x = 1$

A função é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas.

8.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$f(0) = 0$

Então, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, ou seja, existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, pelo que f é contínua em $x = 0$. Como o quociente de duas funções contínuas e a função seno são funções contínuas, f é contínua.

9.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2\cos x = 2\cos 0 = 2$

Para que a função g seja contínua, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0^+} (-x + a) = 0 + a = 2$.

Portanto, $a = 2$.

10.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 0$; $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}{x^2\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^2\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = 1 = f(1)$$

Então, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, ou seja, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, pelo que f não é contínua em $x = 0$.

No entanto, é contínua em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.

Assim, f não é contínua em $]-\infty, 1[$.

A restrição de f a $]0, 1]$ é o quociente de duas funções contínuas e a restrição a $]-\infty, 0[$ é a diferença de funções contínuas; logo, são funções contínuas.

Portanto, f é contínua em $]-\infty, 1]\backslash\{0\}$.

11.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$ e $f(1) = 0$

Para qualquer uma das funções representadas graficamente, tem-se que o limite lateral à direita no ponto 1 é um número real.

Portanto:

$$\lim_{x \to 1^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \times \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0 \times \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$$

Então, como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, para que a função $f \times g$ seja contínua no ponto 1 , é necessário que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 0$. Mas isto só acontece na primeira opção.

No entanto, verifique-se se $(f \times g)(1) = 0$:

$$(f \times g)(1) = f(1) \times g(1) = 0 \times 1 = 0$$

Logo, parte do gráfico da função g só pode estar representada na opção (I).