Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Forma trigonométrica de um número complexo

1. Mostre que os números complexos

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad w = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \qquad \mathrm{t} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

são unitários.

2. Sejam A e B os afixos dos números complexos unitários $z_0 = 1$ e $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.
Determine os valores de a e b, de modo que:

2.1. $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$ 2.2. $A\hat{O}B = \frac{3\pi}{2}$ 2.3. $A\hat{O}B = \frac{5\pi}{4}$

3. Considere os números complexos

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3.1. Mostre que z_1 e z_2 são unitários.

3.2. Indique um argumento de:

3.2.1. z_1 3.2.3. $z_1 z_2$ 3.2.5. $\frac{z_1}{z_2}$

3.2.2. z_2 3.2.4. $z_1 \overline{z_2}$

4. Escreva na forma $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, os seguintes números complexos:

4.1. $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 4.2. $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ 4.3. $e^{i\frac{\pi}{2}}$

5. Escreva na forma $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ os seguintes números complexos:

5.1. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 5.2. i

5.3. -1

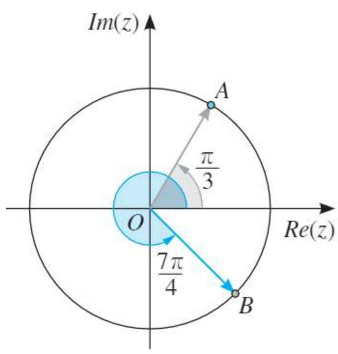
6. Escreva os seguintes números complexos na forma rw, com $r \in \mathbb{R}^+$ e $w \in \mathbb{C}$, tal que $|w| = 1$.

6.1. $-3 + 2i$ 6.2. $3 + 4i$

7. Considere no plano de Argand os complexos z e w, de afixos A e B, respetivamente.

Os pontos A e B pertencem á circunferência de centro na origem e raio 2.

Considerando as amplitudes dos ângulos assinalados na figura, determine os complexos z e w na forma trigonométrica e na forma $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.



8. Escreva os complexos seguintes na forma trigonométrica:

8.1. $-2+2i$

8.2. $-\sqrt{3}+i$

8.3. $2i$

8.4. -4

9. Escreva os complexos seguintes na forma $a+bi, a, b \in \mathbb{R}$.

9.1. $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

9.2. $\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

9.3. $5e^{i\frac{\pi}{2}}$

9.4. $\frac{1}{2}e^{i0}$

10. Determine, na forma trigonométrica, cada um dos seguintes números complexos:

10.1. $-1+i$

10.2. $2-2\sqrt{3}i$

10.3. $-i$

10.4. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

10.5. 3

10.6. $\frac{2i}{1+i}$

Soluções

1.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

$$|t| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

2.

2.1.

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee$$

$$\vee\ z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(a = -\frac{1}{2} \wedge b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(a = -\frac{1}{2} \wedge b = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2.2.

$$z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 1i \vee$$

$$\vee\ z = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + 1i$$

$$(a = 0 \wedge b = -1) \vee (a = 0 \wedge b = 1)$$

2.3.

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \vee$$

$$\vee\ z = e^{-i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\left(a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge b = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge b = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3.

3.1.

$$|z_1| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1 \qquad |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

3.2.

3.2.1.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo, $\frac{\pi}{4}$ é um argumento de z_1.

3.2.2.

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo, $\frac{2\pi}{3}$ é um argumento de z_2.

3.2.3.

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

3.2.4.

$$arg(z_1\,\overline{z_2}) = arg(z_1) + arg(\overline{z_2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$$

3.2.5.

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$$

4.

4.1.

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

4.2.

$$e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

4.3.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

5.

5.1.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

5.2.

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

5.3.

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

6.

6.1.

$$|-3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

$$-3+2i = \sqrt{13}\left(\frac{-3+2i}{\sqrt{13}}\right) = \sqrt{13}\left(\frac{-3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13}i\right)$$

Assim, $r = \sqrt{13}$ e $w = \frac{-3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13}i$, onde $|w| = 1$

6.2.

$$|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$3+4i = 5\left(\frac{3+4i}{5}\right) = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$$

Assim, $r = 5$ e $w = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, onde $|w| = 1$

7.

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i = 2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$w = 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)i = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$w = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

8.

8.1.

$$|-2+2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$-2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)i\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

8.2.

$$|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$-\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

8.3.

$$|2i| = 2$$

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

8.4.

$$|-4| = 4$$

$$-4 = 4(\cos\pi + \sin\pi i) = 4e^{i\pi}$$

9.

9.1.

$$2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{2}i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

9.2.

$$\sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

9.3.

$$5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}i\right) = 5i$$

9.4.

$$\frac{1}{2}e^{i0} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{1}{2}$$

10.

10.1.

$$|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{3\pi}{4}$ é um argumento de $-1+i$

Logo, $-1+i$ pode ser representado na forma trigonométrica por $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

10.2.

$$|2-2\sqrt{3}\,i|=\sqrt{4+4\times 3}=\sqrt{16}=4$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \sin\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\pi}{3}$ é um argumento de $2-2\sqrt{3}\,i$

Logo, $2-2\sqrt{3}\,i$ pode ser representado na forma trigonométrica $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

10.3.

$-i$ pode ser representado na forma trigonométrica por $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ uma vez que tem módulo 1 e o seu afixo pertence ao semieixo negativo das ordenadas.

10.4.

$$|-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i|=\sqrt{2+2}=2$$

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{5\pi}{4}$ é um argumento de $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

Logo, $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$ pode ser representado, na forma trigonométrica por $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

10.5.

3 pode ser representado na forma trigonométrica por $3e^{i\times 0}$, uma vez que tem módulo 3 e o seu afixo pertence ao semieixo positivo das abcissas.

10.6.

$$\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{1-i}=\frac{2i+2}{1+1}=\frac{2i+2}{2}=1+i$$

$$|1+i|=\sqrt{2} \qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\pi}{4}$ é um argumento de $1+i$.

Logo, $1+i$ pode ser representado na forma trigonométrica por $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.