Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Progressões aritméticas

1. Considere a sucessão (v_n) definida por recorrência:

$$\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = v_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.1. Calcule os quatro primeiros termos de (v_n).
1.2. Justifique que (v_n) é uma progressão aritmética.
1.3. Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que:

$$v_n = 3n - 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

1.4. Calcule v_{100}.

2. Verifique se são progressões aritméticas as sucessões de termo geral:

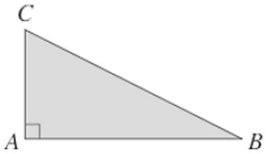
2.1. $a_n = \frac{1}{2n} - 5$
2.2. $b_n = \frac{n}{2} - 5$
2.3. $c_n = 1 + \frac{n-5}{2}$
2.4. $d_n = 2 \times (-1)^n + 5$

3. Considere a sucessão (v_n) em que se sabe que:

- $v_1 = -\frac{5}{2}$
- $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

3.1. Justifique que (v_n) é uma progressão aritmética e indique a sua razão.
3.2. Determine v_8.

4. Os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo são três termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 3.
Determine a área desse triângulo.



5. Três termos consecutivos de uma progressão aritmética são dados, para um determinado valor de x, respetivamente por:

$$x - 1, x^2 \text{ e } x + 5$$

Determine esses três termos.

6. Considere a progressão aritmética (u_n) de razão -2 e $u_2 = 10$.

6.1. Defina (u_n) por recorrência.
6.2. Determine um termo geral de (u_n).

7. Determine o termo geral de uma progressão aritmética (a_n) em que:

7.1. $a_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{2}$

7.2. $a_1 = -4$ e $a_9 = 20$

7.3. $a_5 = 7$ e $a_{15} = 22$

8. Classifique quanto á monotonia e escreva um termo geral das progressões aritméticas em que:

8.1. $b_1 = -1$ e $r = \frac{2}{3}$

8.2. $b_4 = 5$ e $b_{10} = 2$

9. Sabendo que a soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética é 15 e que o seu produto é 120, determine a progressão aritmética de comprimento 4.

10. Calcule a soma dos 20 primeiros múltiplos de 3.

11. Seja (u_n) uma progressão aritmética definida por:

$$u_n = \frac{2n-5}{3}$$

Determine a soma:

11.1. Dos 15 primeiros termos de (u_n).

11.2. Do 11º ao 34º termos, inclusive, de (u_n).

12. O José é ciclista e durante uma competição de ciclismo percorreu com a sua bicicleta $1500\ km$.
Sabendo que, de dia para dia, aumentava $10\ km$ a distância a percorrer e que no 6º dia percorreu $80\ km$, quantos dias demorou a competição?

Soluções

1.

1.1. $v_1 = -2\,;\ v_2 = -2 + 3 = 1\,;\ v_3 = 1 + 3 = 4\,;\ v_4 = 4 + 3 = 7$

1.2.

(v_n) é uma progressão aritmética porque cada termo se obtém, a partir do anterior, somando sempre a mesma constante (3).

1.3.

Para $n = 1$, tem-se $v_1 = 3 - 5 = -2$, que é verdade.
Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3n - 5$.
Tese: $v_{n+1} = 3(n+1) - 5$
Demonstração:

$$v_{n+1} = v_n + 3$$

Por hipótese, obtém-se:

$$v_{n+1} = 3n - 5 + 3 = 3(n+1) - 5$$

Portanto, pelo princípio de indução, tem-se $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3n - 5$.

1.4. $v_{100} = 3 \times 100 - 5 = 295$

2.

2.1.

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2(n+1)} - 5\right) - \left(\frac{1}{2n} - 5\right) =$$

$$= \frac{2n - 2n - 2}{2n \times 2(n+1)} = -\frac{1}{2n(n+1)}$$

Não é uma progressão aritmética, pois a diferença $a_{n+1} - a_n$ não é constante.

2.2.

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{n+1}{2} - 5\right) - \left(\frac{n}{2} - 5\right) = \frac{n+1-n}{2} = \frac{1}{2}$$

É uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

2.3.

$$c_{n+1} - c_n = \left(1 + \frac{n+1-5}{2}\right) - \left(1 + \frac{n-5}{2}\right) = \frac{n-4-n+5}{2} = \frac{1}{2}$$

É uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

2.4.

$$d_{n+1} - d_n = (2 \times (-1)^{n+1} + 5) - (2 \times (-1)^n + 5) =$$

$$= 2 \times (-1)^{n+1} + (-1) \times 2 \times (-1)^n = 4 \times (-1)^{n+1}$$

Não é uma progressão aritmética.

3.

3.1.

(v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ porque cada termo se obtém a partir do anterior, somando $\frac{1}{2}$.

3.2. $v_8 = -\frac{5}{2} + 7 \times \frac{1}{2} = 1$

4.

Seja $x = \overline{AC}$. Então, $x + 3 = \overline{AB}$ e $x + 6 = \overline{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$(x+6)^2 = (x+3)^2 + x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = x^2 + 6x + 9 + x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \times 27}}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 12}{-2} \Leftrightarrow x = 9 \vee x = -3$$

Logo, $\overline{AC} = 9$, $\overline{AB} = 12$ e $\overline{BC} = 15$.

Assim, $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = 54$ u. a.

5.

Seja r a razão da progressão aritmética. Então:

$$\begin{cases} x^2 = x - 1 + r \\ x + 5 = x^2 + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = x^2 - x + 1 \\ x + 5 = x^2 + x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = x^2 - x + 1 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = x^2 - x + 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = x^2 - x + 1 \\ x = 2 \vee x = -1 \end{cases}$$

Se $x = -1$, $r = 1^2 + 1 + 1 = 3$ e os termos são: -2, 1 e 4.

Se $x = 2$, $r = 2^2 - 2 + 1 = 3$ e os termos são: 1, 4 e 7.

6.

6.1.

Tem-se $u_1 = u_2 - (-2) = 10 + 2 = 12$; logo, $\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$.

6.2. $u_n = 12 - 2(n-1) = 12 - 2n + 2 = 14 + 2n$

7.

7.1.

$$a_n = 2 - \frac{1}{2}(n-1) = \frac{5}{2} - \frac{n}{2}$$

7.2.

$$a_n = -4 + \frac{20 - (-4)}{8}(n-1) = -4 + 3(n-1) = 3n - 7$$

7.3.

$$a_n = 7 + \frac{22-7}{10}(n-5) = 7 + \frac{3}{2}(n-5) = \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$$

8.

8.1.

Como $r > 0$, (b_n) é monótona crescente. Um termo geral pode ser:

$$b_n = -1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$$

8.2.

Como $r = \dfrac{b_4 - b_{10}}{4 - 10} = \dfrac{5-2}{-6} = -\dfrac{1}{2} < 0$, (b_n) é monótona decrescente.

Um termo geral pode ser (pelo exercício 8):

$$5 - \frac{1}{2}(n-4) = 7 - \frac{n}{2}$$

9.

Sejam $a = u_1$ e r a razão desta progressão. Tem-se que:

$$\begin{cases} a + a + r + a + 2r = 15 \\ a(a + r)(a + 2r) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - r \\ (5 - r)(5 - r + r)(5 - r + 2r) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - r \\ -5r^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - r \\ r = 1 \vee r = -1 \end{cases}$$

Se $r = 1$, $a = 4$ e a progressão é $(4, 5, 6, 7)$; se $r = -1$, $a = 6$ e a progressão é $(6, 5, 4, 3)$.

10.

Considere-se a sucessão dos múltiplos de 3 , de termo geral $u_n = 3n$.

Então:

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{3 + 60}{2} \times 20 = 630$$

11.

11.1.

$$S_{15} = \frac{u_1 + u_{15}}{2} \times 15 = \frac{\frac{2-5}{3} + \frac{2 \times 15 - 5}{3}}{2} \times 15 = \frac{-1 + \frac{25}{3}}{2} \times 15 = \frac{165}{3} = 55$$

11.2.

$$S = \sum_{i=11}^{34} u_i = \frac{u_{11} + u_{34}}{2} \times 24 = \frac{\frac{2 \times 11 - 5}{3} + \frac{2 \times 34 - 5}{3}}{2} \times 24 = \frac{\frac{17}{3} + \frac{63}{3}}{2} \times 24 = \frac{40}{3} \times 24 = 320$$

12.

Seja (u_n) a sucessão do número de quilómetros percorridos em cada dia da competição. Então:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow 1500 = \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1500 = \frac{2u_1 + 10(n-1)}{2} \times n$$

Por outro lado, $u_6 = u_1 + 5r \Leftrightarrow 80 = u_1 + 50 \Leftrightarrow u_1 = 30$.

Logo:

$$1500 = \frac{2 \times 30 + 10(n-1)}{2} \times n \Leftrightarrow 300 = 6n + (n^2 - n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n - 300 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 300}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm 35}{2} \Leftrightarrow n = -20 \vee n = 15$$

Portanto, a competição durou 15 dias.