Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções

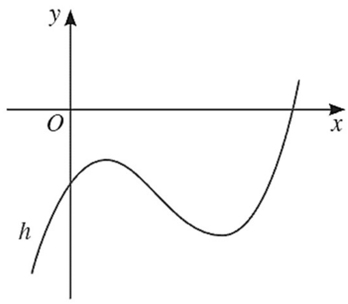
1. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

1.1. Determine o declive das retas tangentes ao gráfico de g nos pontos de abcissa 1 e 2.

1.2. Estude a monotonia de g'.

2. Na figura seguinte está parte do gráfico de uma função, h, de domínio $\mathbb{R}$. Indique o sinal de:



2.1. $h'(0)$

2.2. $h''(0)$

2.3. $h(0) + h''(0)$

2.4. $h'(0) \times h''(0)$

3. Considere a função f de domínio $[2, 5]$, tal que:

$$f''(x) > 0, \qquad \forall\, x \in [2, 5]$$

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras:

3.1. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

3.2. f é crescente.

3.3. $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in [2, 5]$

3.4. $f'(3) < f'(4)$

4. Considere as funções f e g reais de variável real definidas por:

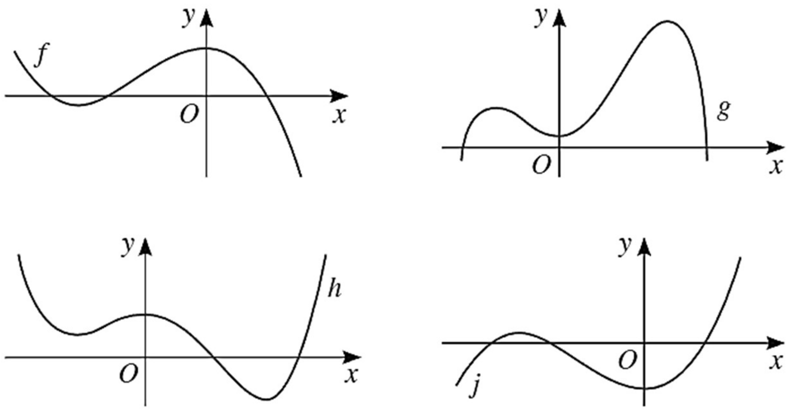
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \qquad\qquad g(x) = 3x^4 - 5x^3$$

4.1. Determine uma expressão analítica de f'' e g''.

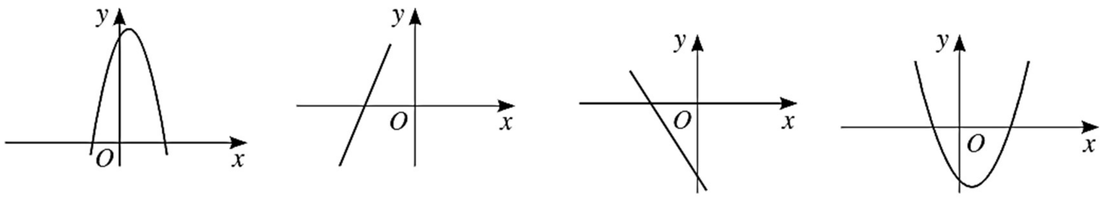
4.2. Determine os zeros de f'' e g''.

4.3. Estude o sinal de f'' e g'' e determine, caso existam, as coordenadas dos pontos de inflexão dos gráficos f e g.

5. Considere as funções f, g, h e j representadas graficamente nas figuras seguintes.



Os gráficos seguintes são os das segundas derivadas de f, g, h e j. Faça corresponder o gráfico da função ao da sua segunda derivada.



6. Estude as funções seguintes quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão:

6.1. $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

6.2. $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

6.3. $h(x) = |x^2 - 9|$

6.4. $i(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = ax^3 + bx^2$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
Determine a e b de modo que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 2)$.

8. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 5$.
Determine a equação reduzida das retas tangentes ao gráfico de f nos seus pontos de inflexão recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

9. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ definida por:

$$g(x) = \frac{6}{x^2 - 4}$$

Resolva as questões seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

9.1. Estude a função g quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

9.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Soluções

1.

1.1.

$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$

$g'(1) = 12 - 48 + 36 \Leftrightarrow g'(1) = 0$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é 0 .

$g'(2) = 12 \times 4 - 48 \times 2 + 36 \Leftrightarrow g'(2) = -12$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2 é -12 .

1.2.

$g''(x) = 24x - 48$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$	mín	$\nearrow$

g' é crescente em $[2, +\infty[$.

g' é decrescente em $]-\infty, 2]$.

2.

2.1. $h'(0) > 0$

2.2. $h''(0) < 0$

2.3. $h(0) + h''(0) < 0$

2.4. $h'(0) \times h''(0) < 0$

3.

3.1. Verdadeira, pois $f''(x) > 0, \forall x \in D_f$.

3.2.

Não é necessariamente verdadeira.

Se $f(x) = x^2 - 6x + 6$, $f''(x) > 0$, e, no entanto, f é decrescente em $]2, 3[$.

3.3.

Não é necessariamente verdadeira. Se $f(x) = x^2 - 6x + 6$, $f''(x) > 0$, e, no entanto, $f'(2) < 0$.

3.4. Verdadeira, pois, se $f''(x) \geqslant 0$, então, f' é crescente, pelo que $f'(3) < f'(4)$.

4.

4.1.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(2x)(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x)'(x^2+1)^2 - 4x[(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2} = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{4(x^2+1)^2 - 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$g'(x) = 12x^3 - 15x^2$

$g''(x) = 36x^2 - 30x$

4.2.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \underset{(x^2+1)^3 \neq 0}{\Leftrightarrow} 4 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 30x = 0 \Leftrightarrow x(36x - 30) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{6}$$

4.3.

Função f:

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico de f: $I_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e $I_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Função g:

	$-\infty$	0		$\frac{5}{6}$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$g(0) = 0 \qquad g\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{625}{432}$

Coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico de g: $J_1(0, 0)$ e $J_2\left(\frac{5}{6}, -\frac{625}{432}\right)$

5. $f \rightarrow \text{III} \qquad g \rightarrow \text{I} \qquad h \rightarrow \text{IV} \qquad j \rightarrow \text{II}$

6.

6.1.

$f(x) = x^4 - x^3 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 6x$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(12x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$f(0) = 1 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$

O gráfico de f tem:

a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$;

a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$;

o gráfico de f tem dois pontos de inflexão. Um em $x = 0$ e outro em $x = \frac{1}{2}$, cujas coordenadas são $(0, 1)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$.

6.2.

$$g(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$g'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\times 2(x^2+1)\times 2x}{[(x^2+1)^2]^2}=-\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0\underset{x^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow}6x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3}{4}$$

O gráfico de g tem:

a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$;

a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$;

dois pontos de inflexão de abcissas $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, cujas coordenadas são $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$.

6.3.

$$h(x)=\begin{cases}x^2-9 & \text{se } x^2-9\geqslant 0\\ 9-x^2 & \text{se } x^2-9<0\end{cases}\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases}x^2-9 & \text{se } x\leqslant -3 \text{ ou } x\geqslant 3\\ 9-x^2 & \text{se } -3<x<3\end{cases}$$

Calculando a derivada de h, obtém-se:

$h'(x)=2x$, se $x<-3$ ou $x>3$

$h'(x)=-2x$, se $-3<x<3$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{h(x)-h(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-9-0}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=-6$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{h(x)-h(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3^+}\frac{9-x^2-0}{x+3}=\lim_{x\to -3^+}\frac{(3-x)(3+x)}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to -3^+}(-x+3)=6$$

Como $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{h(x)-h(-3)}{x+3}=-6$ e $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{h(x)-h(-3)}{x+3}=6$,

h não é diferenciável em $x=-3$.

$$h'(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x<-3 \text{ ou } x>3\\ -2x & \text{se } -3<x<3\end{cases}$$

Calculando a derivada de 2.ª ordem:

$$h''(x)=\begin{cases}2 & \text{se } x<-3 \text{ ou } x>3\\ -2 & \text{se } -3<x<3\end{cases}$$

Assim, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[-3,3]$ e para cima em $]-\infty,-3]$ e em $[3,+\infty[$.

O gráfico de h tem dois pontos de inflexão de coordenadas $(-3,0)$ e $(3,0)$.

6.4.

$$i(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$i'(x) = \frac{x'\left(\sqrt{x^2+1}\right) - x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$i''(x) = -\frac{\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]'}{\left(\sqrt{(x^2+1)^3}\right)^2} = -\frac{\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \times 2x}{(x^2+1)^3} = -\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$i''(x) = 0 \underset{(x^2+1)^{\frac{5}{2}} \neq 0}{\Leftrightarrow} -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
i''	$+$	0	$-$
i	$\cup$	P.I	$\cap$

$i(0) = 0$

O gráfico de i tem:

a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$;

a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$;

um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

7.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2b}{6a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$

$-\frac{b}{3a} = 1 \Leftrightarrow b = -3a$

Por outro lado:

$f(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

Assim, $a = -1$ e $b = 3$.

8.

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I	$\cap$	P.I	$\cup$

$f(1) = 16$

$f(3) = 32$

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão: em $x = 1$ e em $x = 3$, cujas coordenadas são $(1, 16)$ e $(3, 32)$, respetivamente.

Determinemos a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$:

$y = mx + b$

$m = f'(1) = 16$

$y = 16x + b \qquad P(1, 16)$

$16 = 16 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 0$

$y = 16x$

Determinemos a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$:

$y = mx + b$

$m = f'(3) = 0$

$y = b$

$y = 32$

$Q(3, 32)$

9.

9.1.

$g'(x) = -\dfrac{6(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} \Leftrightarrow g'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2-4)^2}$

$g'(x) = 0 \quad \underset{(x^2 - 4 \neq 0 \text{ em } \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\})}{\Leftrightarrow} \quad -12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
g	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

g é crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, 0]$.

g é decrescente em $[0, 2[$ e em $[2, +\infty[$.

g tem um máximo relativo em $x = 0$, de coordenadas $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$.

9.2.

$$g'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2}$$

$$g''(x) = \frac{12(x^2-4)^2 - 12x \times 2(x^2-4) \times 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -\frac{12(x^2-4) - 48x^2}{(x^2-4)^3} = -\frac{12x^2 - 48 - 48x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{36x^2+48}{(x^2-4)^3} = \frac{12(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$g''(x) = 0 \underset{(x^2-4 \neq 0 \text{ em } \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\})}{\Leftrightarrow} 3x^2 + 4 = 0$ equação impossível em $\mathbb{R}$.

$g''(x)$ não tem zeros.

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$
g	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, 2[$.

O gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$, $]2, +\infty[$.

O gráfico de g não tem pontos de inflexão.