Nome do aluno	Nº	Data / / 20

Inverso de um número complexo não nulo e quociente de números complexos

1. Determine o inverso de:

   1.1. $\sqrt{2}+i$

   1.2. $-2i$

   1.3. $\frac{1-i}{2}$

2. Seja w um número complexo, com parte imaginária positiva, que é solução da equação

$$z^2+4z+5=0$$

Determine $\frac{1}{w}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

3. Calcule e apresente o resultado na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

   3.1. $\frac{3+i}{2-3i}$

   3.2. $\frac{1-i+i^{11}}{i+1}$

   3.3. $\frac{(2-i)(3+2i)-3i}{-1+3i}$

   3.4. $\frac{3-i}{i(4+i)}-\frac{i^3(4-i)}{3-i}$

4. Seja $x\in\mathbb{R}$ e o complexo z definido por

$$z=\frac{x+2i}{2-3i}$$

Determine x de forma que z seja um:

   4.1. Número real.

   4.2. Imaginário puro.

5. Determine o conjunto dos números complexos z, tais que

$$w=\frac{2z-i}{2+iz}$$

É um número real.
Sugestão: recorde que w é um número real se $w=\overline{w}$.

6. Mostre que, qualquer que seja o número complexo z, $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$ é um número real.

7. Seja z um complexo não nulo.

Mostre que, se o conjugado do complexo z é igual ao dobro do inverso de z, então, o módulo de z é $\sqrt{2}$.

8. Mostre que $1-3i$ é solução da equação:

$$\frac{z^2}{2}=z-5$$

9. Seja z um número complexo, tal que $|z| = 1$. Mostre que:

$$\left|\frac{1}{\bar{z}} + 1\right|^2 + \left|\frac{1}{\bar{z}} - 1\right|^2 = 4$$

10. Resolva em $\mathbb{C}$ as equações seguintes, apresentando o resultado na forma algébrica:

10.1. $z^2 + 4 = 0$

10.2. $z^3 + 2z = 0$

10.3. $(3 - i)z = 2 + 3i$

10.4. $z + i\bar{z} = 1 - 4i$

10.5. $\frac{z+2i}{1-z} = -i + 1$

10.6. $(1 - 2i)z - i\bar{z} = 2$

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = (2 - i)^3 \qquad e \qquad z_2 = \frac{-17 + 5i}{1 + i}$$

Resolva a equação:

$$z^2 - z_1 = z_2$$

Apresente as soluções na forma algébrica.

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação:

$$z^3 - z + 6 = 0$$

Sabendo que esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2, e que os afixos dessas três soluções são vértices de um triângulo, determine o perímetro desse triângulo.

Soluções

1.

1.1.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+i}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}-\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}i=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$$

1.2.

$$\frac{1}{-2i}=\frac{2}{(-2)^2}i=\frac{1}{2}i$$

1.3.

$$\frac{1}{\frac{1-i}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}i=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}i=1+i$$

2.

$$z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow z=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 1\times 5}}{2\times 1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}\Leftrightarrow z=\frac{-4\pm 2i}{2}\Leftrightarrow z=-2\pm i$$

$z_1=-2-i$ $\qquad$ $z_2=-2+i$

Como w tem parte imaginária positiva, então, $w=z_2=-2+i$.

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{-2+i}=-\frac{2}{(-2)^2+(-1)^2}-\frac{1}{(-2)^2+(-1)^2}=-\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$$

3.

3.1.

$$\frac{3+i}{2-3i}=\frac{(3+i)(2+3i)}{4+9}=\frac{6+9i+2i-3}{13}=\frac{3}{13}+\frac{11}{13}i$$

3.2.

$$\frac{1-i+i^{11}}{i+1}=\frac{1-i+i^3}{i+1}=\frac{(1-2i)}{i+1}\times\frac{1-i}{1-i}=$$

$$=\frac{1-i-2i-2}{1+1}=\frac{-1-3i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

3.3.

$$\frac{(2-i)(3+2i)-3i}{-1+3i}=\frac{6+4i-3i+2-3i}{-1+3i}=\frac{8-2i}{-1+3i}=$$

$$=\frac{(8-2i)(-1-3i)}{1+9}=\frac{-8+24i+2i-6}{10}=\frac{-14-22i}{10}=$$

$$=-\frac{7+11i}{5}=-\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$$

3.4.

$$\frac{3-i}{i(4+i)}-\frac{i^3(4-i)}{3-i}=\frac{3-i}{4i-1}-\frac{-4i-1}{3-i}=\frac{3-i}{4i-1}+\frac{4i+1}{3-i}=$$
$$=\frac{(3-i)(4i+1)}{-16-1}+\frac{(4i+1)(3+i)}{9+1}=$$
$$=\frac{12i+3+4-i}{-17}+\frac{12i-4+3+i}{10}=$$
$$=\frac{-7-11i}{17}+\frac{-1+13i}{10}=-\frac{87}{170}+\frac{111}{170}i$$

4.

$$z=\frac{x+2i}{2-3i}=\frac{(x+2i)(2+3i)}{4+9}=\frac{2x+3xi+4i-6}{13}=\frac{(2x-6)(3x+4)i}{13}$$

4.1.

$$Im(z)=0\Leftrightarrow\frac{3x+4}{13}=0\Leftrightarrow 3x=-4\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$$

4.2.

$$Re(z)=0\Leftrightarrow\frac{2x-6}{13}=0\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$$

5.

Seja $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$, então, w é real se $w=\overline{w}$.

Como $\overline{w}=\dfrac{2\overline{z}+i}{2-i\overline{z}}$, a igualdade é equivalente a $5z-5\overline{z}=4i|z|^2+4i$.

Se $z=x+yi$, a equação anterior é equivalente a $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$,

que representa uma circunferência de centro em $\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$ e raio $\dfrac{3}{4}$.

6.

Seja $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$ $\qquad \overline{z}=a-bi$

$$\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}=\frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}+\frac{(a-bi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=$$
$$=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}=\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\in\mathbb{R}$$

7.

Seja $z=a+bi$ um complexo não nulo.

Se $\overline{z}=\dfrac{2}{z}$, então, $|z|=\sqrt{2}$

$$\overline{z}=\frac{2}{z}\Leftrightarrow\frac{\overline{z}\times z}{z}=\frac{2}{z}\underset{(z\neq 0)}{\Leftrightarrow}\overline{z}\times z=2\Leftrightarrow|z|^2=2\underset{(|z|>0)}{\Leftrightarrow}|z|=\sqrt{2}$$

8.

$$\frac{(1-3i)^2}{2}=(1-3i)-5\Leftrightarrow\frac{1-6i+9}{2}=-4-3i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{-8-6i}{2}=-4-3i\Leftrightarrow -4-3i=-4-3i$$

Assim, $1-3i$ é solução da equação $\dfrac{z^2}{2}=z-5$.

9.

Seja $z = a + bi$

Como $|z| = 1$ tem-se que $a^2 + b^2 = 1$

$$\left|\frac{1}{\bar{z}} + 1\right|^2 = \left|\frac{z}{z\bar{z}} + 1\right|^2 = \left|\frac{z}{|z|^2} + 1\right|^2 = |z + 1|^2 = (a + 1)^2 + b^2$$

Analogamente: $\left|\frac{1}{\bar{z}} - 1\right|^2 = (a - 1)^2 + b^2$

Então: $(a + 1)^2 + b^2 + (a - 1)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$

10.

10.1.

$$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z = -2i \vee z = 2i$$

C.S. $= \{-2i, 2i\}$

10.2.

$$z^3 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\sqrt{2}i \vee z = \sqrt{2}i$$

C.S. $= \left\{-\sqrt{2}i, 0, \sqrt{2}i\right\}$

10.3.

$$(3 - i)z = 2 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{2 + 3i}{3 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(2 + 3i)(3 + i)}{9 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6 + 2i + 9i - 3}{10} \Leftrightarrow z = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

C.S. $= \left\{\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i\right\}$

10.4.

$z + i\bar{z} = 1 - 4i$

Seja $z = x + yi$, com x, $y \in \mathbb{R}$.

$$(x + yi) + i(x - yi) = 1 - 4i \Leftrightarrow x + yi + xi + y = 1 - 4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y) + (x + y)i = 1 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases} \quad \text{Impossível}$$

C.S. $= \varnothing$

10.5.

$$\frac{z + 2i}{1 - z} = -i + 1 \Leftrightarrow \frac{z + 2i}{1 - z} = \frac{(-i + 1)(1 - z)}{1 - z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + 2i = (-i + 1)(1 - z) \Leftrightarrow z + 2i = -i + zi + 1 - z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z - zi = -3i + 1 \Leftrightarrow z(2 - i) = -3i + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3i + 1}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(-3i + 1)(2 + i)}{4 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-6i + 3 + 2 + i}{5} \Leftrightarrow z = \frac{5 - 5i}{5} \Leftrightarrow z = 1 - i$$

C.S. $= \{1 - i\}$

10.6.

$(1-2i)z - i\bar{z} = 2$

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$(1-2i)(x+yi) - i(x-yi) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi - 2xi + 2y - ix - y = 2 \Leftrightarrow x + y + (-3x+y)i = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3x=2 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

C.S. $= \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right\}$

11.

$z_1 = (2-i)^3 =$

$= {}^3C_0 \times 2^3 \times (-i)^0 + {}^3C_1 \times 2^2 \times (-i)^1 + {}^3C_2 \times 2^1 \times (-i)^2 + {}^3C_3 \times 2^0 \times (-i)^3 =$

$= 8 + 3 \times 4 \times (-i) + 3 \times (-2) + i = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$z_2 = \dfrac{-17+5i}{1+i} = \dfrac{(-17+5i)(1-i)}{1+1} = \dfrac{-17+17i+5i+5}{2} =$

$= \dfrac{-12+22i}{2} = -6 + 11i$

$z^2 - z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^2 - 2 + 11i = -6 + 11i \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = -2i \vee z = 2i$

C.S. $= \{-2i, 2i\}$

12.

Como -2 é zero do polinómio $z^3 - z + 6$, então, este é divisível por $z+2$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	0	−1	6
−2		−2	4	−6
	1	−2	3	0

Então: $z^3 - z + 6 = (z+2)(z^2 - 2z + 3)$

$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{2}i$

C.S. $= \left\{-2, 1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i\right\}$

Sejam A, B e C os vértices do triângulo, afixos de $-2, 1-\sqrt{2}i$ e $1+\sqrt{2}i$, respetivamente:

$\overline{AB} = |-2-1+\sqrt{2}\,i| = |-3+\sqrt{2}\,i| = \sqrt{9+2} = \sqrt{11}$

$\overline{AC} = |-2-1+\sqrt{2}\,i| = |-3-\sqrt{2}\,i| = \sqrt{9+2} = \sqrt{11}$

$\overline{BC} = |1-\sqrt{2}\,i - 1 - \sqrt{2}\,i| = |-2\sqrt{2}\,i| = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

$P_{[ABC]} = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{2}$