Nome do aluno	Nº	Data / / 20

Fatorial de um número. Permutações

1. Numa competição olímpica de remo, os barcos têm oito lugares além do timoneiro.

Indique o número de formas distintas de se sentarem oito atletas nesses oito lugares.

2. Seja n um número natural. Simplifique i mais possível as expressões:

2.1. $\frac{n!}{(n-1)!}$

2.2. $\frac{2}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)!}$

3. Resolva em $\mathbb{N}$ as seguintes equações:

3.1. $\frac{n!}{(n-2)!}=30$

3.2. ${}^{n-1}A_2 = 240$

4. Sete atletas de uma equipa de voleibol feminina vão tirar uma fotografia alinhando-se lado a lado.

4.1. De quantas maneiras diferentes se podem alinhar as atletas para a fotografia?

4.2. Sabendo que uma delas é a capitã da equipa, determine o número de formas diferentes de tirar a fotografia com a capitã no meio.

4.3. Se nenhuma das atletas tiver a mesma altura, determine o número de maneiras diferentes de tirar a fotografia se as atletas ficarem alinhadas por ordem de alturas.

5. Quantos números inteiros distintos é possível formar utilizando todos os algarismos do número 253 225, mantendo o número de vezes que cada número aparece?

6. Uma estante tem oito prateleiras.

Pretende-se expor, nessa estante, seis peças de porcelana: duas jarras iguais e quatros pratos diferentes.

De quantas maneiras podem ser expostas as seis peças nas oito prateleiras, de tal modo que não fique mais do que uma peça em cada prateleira?

7. Um anagrama de uma palavra é qualquer sequência, com ou sem significado, obtida pela troca da ordem das suas letras. Por exemplo, MORA e RMAO são anagramas da palavra ROMA.

Quantos anagramas existem para cada uma das seguintes palavras?

7.1. ROMA

7.2. ANAGRAMA

7.3. BATATA

Soluções

1. $8! = 40\,320$ formas diferentes de permutar os oito

2.

2.1.

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

2.2.

$$\frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+2)!} + \frac{(n+2)}{(n+1)!(n+2)} =$$

$$= \frac{2}{(n+2)!} + \frac{(n+2)}{(n+2)!} = \frac{2+n+2}{(n+2)!} = \frac{n+4}{(n+2)!}$$

3.

3.1.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-30)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -5 \vee n = 6$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então, $n = 6$.

3.2.

$${}^{n-1}A_2 = 240 \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 240 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 240 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 24 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 238 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-238)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -14 \vee n = 17$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então, $n = 17$.

4.

4.1. $7! = 5040$ maneiras diferentes.

4.2.

Existem $6!$ formas de posicionar as seis atletas e, para cada uma delas, apenas uma maneira de posicionar a capitã. Assim, existem $6! \times 1 = 720$ formas de tirar a fotografia com a capitã no meio.

4.3. Existem duas maneiras possíveis: ou por ordem crescente, ou por ordem decrescente.

5.

Sendo N o número de números inteiros distintos, tem-se:

$$N \times 3! \times 2! = 6! \Leftrightarrow N = \frac{6!}{3! \times 2!} \Leftrightarrow N = 60$$

6.

Duas das prateleiras ficam vazias, duas ficam com jarras iguais.
As permutações de prateleiras vazias e de jarras iguais, dentro de cada uma destas disposições, originam disposições iguais.

Assim, existem $\frac{8!}{2! \times 2!} = 10\,080$ maneiras de expor as seis peças nas oito prateleiras.

7.

7.1. $4! = 24$

7.2.

Sendo N o número de configurações diferentes, tem-se:

$$4! \times N = 8! \Leftrightarrow N = \frac{8!}{4!} \Leftrightarrow N = 1680$$

7.3.

Sendo N o número de configurações diferentes, tem-se:

$$3! \times 2! \times N = 6! \Leftrightarrow N = \frac{6!}{3! \times 2!} \Leftrightarrow N = 60$$