Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Teorema da probabilidade total

1. Considere dois acontecimentos A e B de um espaço amostral E finito, tais que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0{,}1 \qquad\qquad P(A|B) = 0{,}2$$

  1.1. Determine:

    1.1.1. $P(B)$

    1.1.2. $P(\bar{A}|B)$

  1.2. Admita que A e B são independentes. Determine $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

2. Sejam E um conjunto finito e P uma probabilidade em $P(E)$ e $A, B \in P(E)$ tais que:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} \qquad\qquad P(A) = 2\,P(B) \qquad\qquad P(A|B) = \frac{1}{6}$$

Averigue se A e B são acontecimentos independentes.

3. Um estudo feito a uma creta marca de iogurtes revelou que:

- Se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é de $0{,}005$;
- Se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é de $0{,}65$.

Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora do prazo.

Escolhendo, ao acaso, um desses iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

4. A Adriana tem três sacos, A_1, A_2 e A_3, que contêm bolas vermelhas e bolas pretas distribuídas do seguinte modo:

Saco A_1: 2 bolas vermelhas e 3 bolas pretas;

Saco A_2: 3 bolas vermelhas e 7 bolas pretas;

Saco A_3: 4 bolas vermelhas e 4 bolas pretas.

A Adriana retira ao acaso uma bola de um dos sacos. Determine a probabilidade de a bola ser vermelha.

5. Relativamente aos alunos de uma escola secundária sabe-se que:

- 60% praticam desporto;
- Dos alunos que praticam desporto, 20% têm aulas de música;
- 5% dos alunos não praticam desporto nem têm aulas de música.

Determine a probabilidade de, ao escolher ao acaso um aluno dessa escola, ele ter aulas de música.

6. Sejam E um conjunto finito, P uma probabilidade em $P(E)$ e $A, B \in P(E)$, tais que:

$$P(A) = 0{,}2 \qquad\qquad P(B|A)0{,}5 \qquad\qquad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}4$$

Determine:

  6.1. $P(B)$

  6.2. $P(A|B)$

Soluções

1.

1.1.

1.1.1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0{,}1 \text{ , logo, } P(A \cap B) = 0{,}1$$

$$P(A|B) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}2 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}1}{0{,}2} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

1.1.2.

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

1.2.

Como A e B são independentes, então, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$0{,}1 = P(A) \times 0{,}5 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}2$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}8$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}5$

Assim,

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}8 + 0{,}5 - P(\overline{A \cap B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1{,}3 - 1 + P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 + 0{,}1 \Leftrightarrow \; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$

OU

$P(A) = 0{,}2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}6$

e

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}4$

2.

Temos que $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{P(B)}{6}$

Por outro lado, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = 2P(B) + P(B) - \dfrac{P(B)}{6} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{6} P(B) \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{4}{17}$

Assim: $P(A) = 2P(B) \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{8}{17}$

E, portanto, $P(A \cap B) = \dfrac{P(B)}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{2}{51}$.

Verifiquemos se os acontecimentos são independentes:

$P(A) \times P(B) = \dfrac{8}{17} \times \dfrac{4}{17} = \dfrac{32}{289}$

Por outro lado, $P(A \cap B) = \frac{2}{51}$

Como $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, então, podemos afirmar que os acontecimentos A e B não são independentes.

3.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

E: «O iogurte está estragado.»

V: «O iogurte está dentro do prazo de validade.»

$P(V) = \frac{8}{10} = 0{,}8$

Então,

$$P(E) = P(E \cap V) + P(E \cap \overline{V}) = P(V) \times P(E|V) + P(\overline{V}) \times P(E|\overline{V}) =$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}005 + 0{,}2 \times 0{,}65 = 0{,}134$$

4.

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_1: «A bola é retirada do saco A_1 . »

A_2: «A bola é retirada do saco A_2 . »

A_3: «A bola é retirada do saco A_3 . »

V: «A bola retirada é vermelha.»

$$P(V) = P(V \cap A_1) + P(V \cap A_2) + P(V \cap A_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(V) = P(A_1) \times P(V|A_1) + P(A_2) \times P(V|A_2) + P(A_3) \times P(V|A_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(V) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} \Leftrightarrow P(V) = \frac{2}{5}$$

5.

Considerem-se os acontecimentos:

D: «O aluno pratica desporto.»

M: «O aluno tem aulas de música.»

Sabe-se que $P(D) = 0{,}6$; $P(M|D) = 0{,}2$ e $P(\overline{M} \cap \overline{D}) = 0{,}05$

$$P(M|D) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = 0{,}2 \Leftrightarrow P(M \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(M \cap D) = 0{,}12$$

Organizando os dados numa tabela:

	D	$\overline{D}$	
M	0,12		0,47
$\overline{M}$	0,48	0,05	0,53
	0,6		1

$P(\overline{M} \cap D) = 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}48$

$P(\overline{M}) = 0{,}48 + 0{,}05 = 0{,}53$

$P(M) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$

6.

6.1.

$$P(B) = P(A)\,P(B|A) + P(\overline{A})\,P(B|\overline{A}) = P(A)\,P(B|A) + P(\overline{A})\left(1 - P(\overline{B}|\overline{A})\right) =$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}58$$

OU

$$P(B|A) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}5 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}5 \times 0{,}2 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}1$$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = 0{,}4 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}4 \times 0{,}8 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}32$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}32 \Leftrightarrow P(\overline{B \cup A}) = 0{,}32 \Leftrightarrow 1 - P(B \cup A) = 0{,}32 \Leftrightarrow P(B \cup A) = 0{,}68$$

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}2 + P(B) - 0{,}68 = 0{,}1 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}58$$

6.2.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{0{,}1}{0{,}58} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{5}{29}$$