Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Sucessões definidas por recorrência

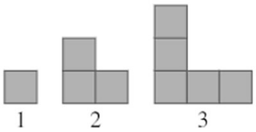
1. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.1. Determine os cinco primeiros termos de (u_n).

1.2. Prove que (u_n) é monótona decrescente.

2. Na figura estão representados os três primeiros termos de uma sucessão de figuras constituídas por quadrados.



2.1. Indique o número de quadrados que constituem o 7º e o 8º termos.

2.2. Seja (q_n) a sucessão do número de quadrados em cada termo. Defina a sucessão (q_n) por recorrência.

2.3. Mostre, por indução matemática, que um termo geral de (q_n) é:

$$q_n = 2n - 1$$

3. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1. Mostre, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

3.2. Deduza da alínea anterior que (u_n) é decrescente.

4. Seja (a_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Prove, por indução matemática, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 1$$

5. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 2u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.1. Mostre, por indução matemática, que um termo geral de (u_n) é $u_n = \frac{1}{1-2n}$.

5.2. Mostre que (u_n) é monótona e limitada.

Soluções

1.

1.1.

$u_1 = 4$; $u_2 = u_1 - 3 = 1$; $u_3 = u_2 - 3 = -2$;
$u_4 = u_3 - 3 = -5$; $u_5 = u_4 - 3 = -8$

1.2.

$u_{n+1} - u_n = u_n - 3 - u_n = -3 < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão é estritamente decrescente.

2.

2.1.

O 7.º termo tem 13 quadrados e o 8.º tem 15 quadrados, pois o número de quadrados aumenta duas unidades de um termo para o termo seguinte.

2.2.

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_{n+1} = q_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.3.

Para $n = 1$, tem-se $q_1 = 2 - 1 = 1$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $q_n = 2n - 1$.

Tese: $q_{n+1} = 2(n + 1) - 1$

Demonstração:

$$q_{n+1} = q_n + 2$$

Por hipótese, obtém-se:

$$q_{n+1} = 2n - 1 + 2 = 2(n + 1) - 1$$

Portanto, pelo princípio de indução, a proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = 2n - 1$ é verdadeira.

3.

3.1.

Para $n = 1$, tem-se $u_1 = 5 > 1$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Tese: $u_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{2}$$

Por hipótese, $u_n > 1$; logo, $\frac{u_n}{2} > \frac{1}{2}$ e, portanto, $u_{n+1} > 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ é verdadeira.

3.2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + u_n}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2}$$

Como $u_n > 1$, $\frac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$; logo, (u_n) é decrescente.

4.

Para $n = 1$, tem-se $0 \leqslant a_1 = \frac{1}{2} \leqslant 1$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.

Tese: $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$

Demonstração:
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

Por hipótese, $a_n \geqslant 0$; logo, $\frac{a_n}{a_n + 1} \geqslant 0$ e $\frac{a_n}{a_n + 1} < a_n \leqslant 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ é verdadeira.

5.

5.1.

Para $n = 1$, tem-se $u_1 = \frac{1}{1-2} = -1$, que é verdade.

Hipótese: Para um certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1-2n}$.

Tese: $u_{n+1} = \frac{1}{1-2(n+1)}$

Demonstração:
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$$

Usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{1-2n}}{1-2\frac{1}{1-2n}} = \frac{\frac{1}{1-2n}}{\frac{1-2n-2}{1-2n}} = \frac{1-2n}{(1-2n-2)} = \frac{1}{1-2(n+1)}$$

Portanto, pelo princípio de indução, a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1-2n}$ é verdadeira.

5.2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1-2(n+1)} - \frac{1}{1-2n} =$$
$$= \frac{1-2n+1+2n}{(-1-2n)(1-2n)} = \frac{2}{-1+4n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é crescente.

Tem-se que $\frac{1}{1-2n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$; logo, (u_n) é majorada.

Como (u_n) é crescente, tem de ser limitada.