Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Módulo de um número complexo

1. Determine $|z|$ para:

   1.1. $z = 2 - i$

   1.2. $z = -3 + 4i$

   1.3. $z = -5$

   1.4. $z = \frac{1}{2}i$

2. Represente no plano complexo os afixos dos números complexos:

   $1 - 2i, -2 + i, 3i, -4, 2 + 3i$

   designados por A, B, C, D e E, respetivamente, e determine a distância de cada um desses afixos à origem.

3. A soma de dois números complexos conjugados é 16 e a soma dos seus módulos é 20. Determine-os.

4. Considere os números complexos z e w definidos por:

$$z = 3 - 4i \qquad e \qquad w = i|z| + \bar{z}$$

   Determine $|zw|$.

5. Seja $z = 2 - 3i$.

   Determine a área e o perímetro do triângulo $[OAB]$ em que O é a origem do referencial, A o afixo de z e B o afixo de $\bar{z}$.

6. Determine o valor exato da distância entre os afixos de z e w, sendo z e w dado por:

   6.1. $z = 2i \quad e \quad w = 4 - 3i$

   6.2. $z = 1 - \sqrt{8}i \quad e \quad w = \sqrt{2} + i$

7. Sejam $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = -2 + 3i$. Mostre que:

   7.1. $|z_1| = |\overline{z_1}|$

   7.2. $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$

   7.3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

   7.4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

8. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e z_1 e z_2 dois números complexos definidos por:

$$z_1 = a + i \qquad e \qquad z_2 = 1 - ai$$

   Determine a de forma que:

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$$

Soluções

1.

1.1.

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

1.2.

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

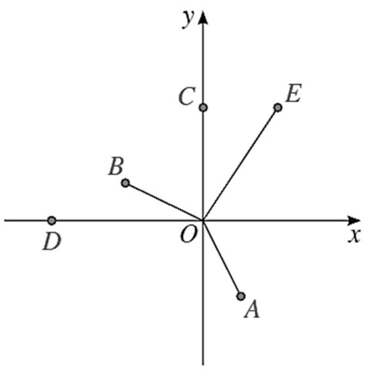
1.3.

$$|z| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

1.4.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

2.



$$\overline{OA} = \sqrt{5}$$
$$\overline{OB} = \sqrt{5}$$
$$\overline{OC} = 3$$
$$\overline{OD} = 4$$
$$OE = \sqrt{13}$$

3.

Seja $z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi \qquad |z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z + \bar{z} = 16 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 16 \Leftrightarrow 2a = 16 \Leftrightarrow a = 8$

$|z| + |\bar{z}| = |z| + |z| = 20 \Leftrightarrow |z| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{64 + b^2} = 10 \Leftrightarrow 64 + b^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

$z = 8 - 6i$ e $\bar{z} = 8 + 6i$

4.

$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad \bar{z} = 3 + 4i$

$w = 5i + 3 + 4i = 3 + 9i \qquad |w| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$|zw| = |z| \times |w| = 5 \times 3\sqrt{10} = 15\sqrt{10}$

5.

$z = 2 - 3i$

$\bar{z} = 2 + 3i$

$\overline{AB} = |z - \bar{z}| = |2 - 3i - 2 - 3i| =$

$= |-6i| = 6$

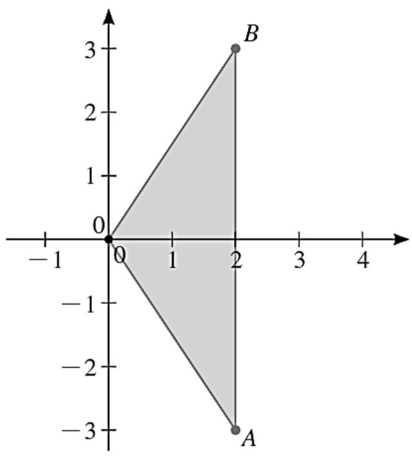
$\overline{AO} = \overline{BO} = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{2^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$A_{[OAB]} = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$

$P_{[OAB]} = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{AB} =$

$= 2 \times \sqrt{13} + 6 = 2\sqrt{13} + 6$



6.

6.1.

$$|z - w| = |2i - 4 + 3i| = |-4 + 5i| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

6.2.

$$|z - w| = |1 - \sqrt{8}\,i - \sqrt{2} - i| = \left|\left(1 - \sqrt{2}\right) - \left(1 + 2\sqrt{2}\right)\right| =$$
$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 + 4\sqrt{2} + 4 \times 2} =$$
$$= \sqrt{12 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(6 + \sqrt{2}\right)}$$

7.

7.1. $|z_1| = |\overline{z_1}| = \sqrt{5}$

7.2. $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1} = 5$

7.3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = \sqrt{5} \times \sqrt{13} = \sqrt{65}$

7.4. $|z_1 + z_2| = |-1 + i| = \sqrt{2} \leqslant |z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + \sqrt{13}$

8.

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |a + i - 1 + ai| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(a - 1) + (1 + a)i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (1 + a)^2} = \sqrt{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (1 + a)^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + 1 + 2a + a^2 = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$