Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Limite de uma função composta

1. Considere as funções f e g definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = x^2 + 5 \qquad g(x) = \frac{2}{x-9}$$

Determine:

1.1. $D_{g \circ f}$

1.2. $\lim\limits_{x \to 4} (g \circ f)\,(x)$

1.3. $\lim\limits_{x \to 2} (g \circ f)\,(x)$

2. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

$$f(x) = 3x - 5 \qquad \lim_{x \to 1} g(x) = 4 \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = 3$$

Determine:

2.1. $\lim\limits_{x \to 1} (f \circ g)(x)$

2.2. $\lim\limits_{x \to 1} (g \circ f)(x)$

3. Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \qquad g(x) = |x| + 2$$

Determine $\lim\limits_{x \to 2} (g \circ f)\,(x)$.

Soluções

1.

1.1.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in \mathbb{R}\backslash\{9\}\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \neq 9\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 4\} = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$$

1.2.

Como $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4}(x^2 + 5) = 21$, então:

$$\lim_{x \to 21} g(x) = \lim_{x \to 21}\left(\frac{2}{x-9}\right) = \frac{1}{6}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 4}(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{6}$.

1.3.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}(x^2 + 5) = 9^-$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+}(x^2 + 5) = 9^+$

Por outro lado:

$$\lim_{x \to 9^-} g(x) = \lim_{x \to 9^-}\left(\frac{2}{x-9}\right) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 9^+} g(x) = \lim_{x \to 9^+}\left(\frac{2}{x-9}\right) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x \to 9^+} g(x) = +\infty \neq -\infty = \lim\limits_{x \to 9^-} g(x)$, não existe $\lim\limits_{x \to 2}(g \circ f)(x)$.

2.

2.1.

Como $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$ e $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4}(3x - 5) = 3 \times 4 - 5 = 7$, tem-se que $\lim\limits_{x \to 1}(f \circ g)(x) = 7$.

2.2.

Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(3x - 5) = 3 \times 1 - 5 = -2$ e $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = 3$, tem-se que $\lim\limits_{x \to 1}(g \circ f)(x) = 3$.

3.

Tem-se que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \lim\limits_{x \to -1}(|x| + 2) = |-1| + 2 = 3$.

Por outro lado, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1}(|x| + 2) = |1| + 2 = 3$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 2}(g \circ f)(x) = 3$.