Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Derivada de segunda ordem de uma função

1. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = x^4 + 2x^2$$

1.1. Determine uma expressão que defina a função f', derivada de f.

1.2. Utilizando a definição de derivada num ponto, calcule $f'(1)$, derivada de f no ponto 1.

1.3. Obtenha uma expressão para a função derivada de f'.

2. Determine uma expressão analítica da segunda derivada das funções:

2.1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

2.2. $g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

2.3. $h(x) = (x^2 - x^3)^3$

3. Para cada uma das funções seguintes determine uma expressão analítica da derivada de segunda ordem e o(s) respetivo(s) zero(s), se existirem.

3.1. $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{5}$

3.2. $f(x) = (x - x^2)(x^2 - 3x + 2)$

3.3. $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$

3.4. $f(x) = \left(\frac{2-x}{x+2}\right)^2$

3.5. $f(x) = \left(x - \frac{1}{x-1}\right)\left(x - \frac{1}{1-x}\right)$

3.6. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

Soluções

1.

1.1. $f'(x) = 4x^3 + 4x$

1.2.

$$(f')'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(1+h)^3 + 4(1+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12h^2 + 16h + 4h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(12h + 16 + h^2)}{h} = 16$$

1.3.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = 12x^2 + 4$$

2.

2.1.

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = -12x + 6$$

2.2.

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x-1) - (x^2 - 2x + 2)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

2.3.

$$h(x) = (x^2 - x^3)^3$$

$$h'(x) = 3(x^2 - x^3)^2 \times (x^2 - x^3)' = 3(x^2 - x^3)^2 \times (2x - 3x^2) = 3x(x^2 - x^3)^2 (2 - 3x)$$

$$h'(x) = 3x(x^2 - x^3)^2 (2 - 3x)$$

$$h''(x) = (3x)'(x^2 - x^3)^2(2 - 3x) + 3x[(x^2 - x^3)^2]'(2 - 3x) + 3x(x^2 - x^3)^2 (2 - 3x)' =$$

$$= 3(x^2 - x^3)^2(2 - 3x) + 3x \times 2(x^2 - x^3)(2x - 3x^2)(2 - 3x) + 3x(x^2 - x^3)^2(-3) =$$

$$= 3(2 - 3x)(x^2 - x^3)^2 + 6x(2 - 3x)(x^2 - x^3)(2x - 3x^2) - 9x(x^2 - x^3)^2 =$$

$$= -6x^4(12x^3 - 28x^2 + 21x - 5)$$

$$h''(x) = -6x^4(12x^3 - 28x^2 + 21x - 5)$$

3.

3.1.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \times (x^3 - 3x^2)' = \frac{1}{5} \times (3x^2 - 6x) = \frac{3x^2 - 6x}{5}$$

$$f''(x) = \frac{1}{5} \times (3x^2 - 6x)' = \frac{1}{5} \times (6x - 6) = \frac{6x - 6}{5}$$

$$f''(x) = \frac{6x - 6}{5}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

3.2.

$$f(x) = (x - x^2)(x^2 - 3x + 2)$$

$$f'(x) = (1 - 2x)(x^2 - 3x + 2) + (x - x^2)(2x - 3) = -4x^3 + 12x^2 - 10x + 2$$

$$f''(x) = -2(x^2 - 3x + 2) + (1 - 2x)(2x - 3) + (1 - 2x)(2x - 3) + 2(x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = -2x^2 + 6x - 4 + 2x - 3 - 4x^2 + 6x + 2x - 3 - 4x^2 + 6x + 2x - 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = -12x^2 + 24x - 10$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 6 \times 5}}{2 \times 6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 - \sqrt{6}}{6} \vee x = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$$

3.3.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{3(2 - x) + (3x + 1)}{(2 - x)^2} = \frac{7}{(2 - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-14}{(2 - x)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{14}{(2 - x)^3} = 0$ equação impossível, em $\mathbb{R}$.

A derivada de segunda ordem não tem zeros.

3.4.

$$f(x) = \left(\frac{2 - x}{x + 2}\right)^2$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{2 - x}{x + 2}\right)\frac{\left((x + 2) \times (-1) - (2 - x)\right)}{(x + 2)^2} = 2\left(\frac{2 - x}{x + 2}\right)\left(\frac{-x - 2 - 2 + x}{(x + 2)^2}\right)$$

$$= 8 \times \frac{x - 2}{(x + 2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{8\left((x + 2)^3 - (x - 2) \times 3 \times (x + 2)^2\right)}{(x + 2)^6} = \frac{8\left(x + 2 - 3(x - 2)\right)}{(x + 2)^4} =$$

$$= \frac{x + 2 - 3x + 6}{(x + 2)^4} = \frac{8(-2x + 8)}{(x + 2)^4} = \frac{-16x + 64}{(x + 2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-16x + 64}{(x + 2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -16x + 64 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

3.5.

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{x-1}\right)\left(x - \frac{1}{1-x}\right) = x^2 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2 \times 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2 - \frac{6}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{6}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)^4 - 6}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 = 3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} + 1 \vee x = -\sqrt[4]{3} + 1 \wedge x \neq 1$$

3.6.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \left(8\sqrt{x^3}\right) = x^3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(8\sqrt{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(x^3\right)^{\frac{2}{3}} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 8^{\frac{2}{3}}x = x^2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = x^2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 4) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 4$$