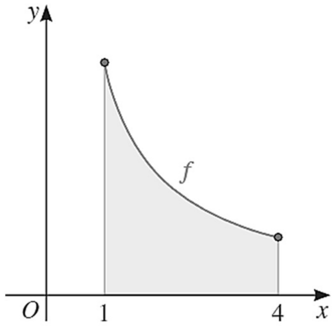
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Teorema fundamental do cálculo integral



1. Considere, num referencial cartesiano, a região do plano delimitada pelo gráfico da função real definida por $f(x) = \frac{4}{x}$, o eixo Ox e as retas de equação $x = 1$ e $x = 4$.

   Calcule a área da região assinalada.

2. Determine os seguintes integrais:

   2.1. $\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\, dx$

   2.2. $\int_0^\pi (1 + \cos x)\, dx$

3. Utilize a fórmula de Barrow para calcular os seguintes integrais:

   3.1. $\int_0^6 x^3\, dx$

   3.2. $\int_e^{e^2} \frac{x}{x^2+5}\, dx$

   3.3. $\int_0^{-1} x\, dx$

4. Considere uma função f contínua não negativa em $[1, 10]$. Sabe-se que:

   - $\int_1^5 f(x)\, dx = 8$
   - $\int_4^5 f(x)\, dx = 1$
   - $\int_5^{10} f(x)\, dx = 2$

   Calcule:

   4.1. $\int_1^{10} f(x)\, dx$

   4.2. $\int_5^1 f(x)\, dx$

   4.3. $\int_1^4 f(x)\, dx$

   4.4. $\int_{10}^4 f(x)\, dx + \int_4^5 f(x)\, dx$

5. Calcule os seguintes integrais:

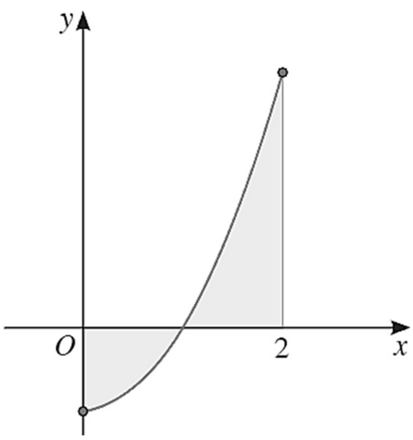
   5.1. $\int_{-3}^5 -5x^2\, dx$

   5.2. $\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (3x - \cos x)\, dx$

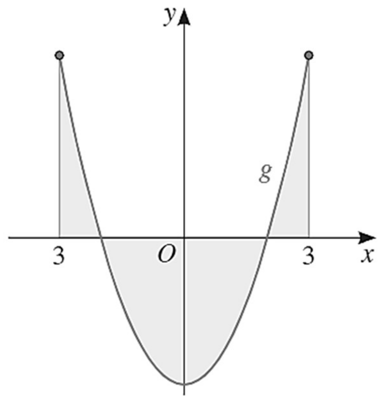
   5.3. $\int_{-4}^{-1} \frac{2}{x}\, dx$

6. A região do plano representada no referencial cartesiano da figura é limitada pelo gráfico da função f definida em $[0, 2]$ por $f(x) = x^2 - 1$, o eixo Ox e as retas de equação $x = 0$ e $x = 2$.

   Determine a área da região.



7. No referencial cartesiano da figura estão representadas a região do plano delimitada pelo gráfico da função g definida por $g(x) = x^2 - 4$, o eixo Ox e as retas de equação $x = -3$ e $x = 3$. Calcule:



7.1. $\int_{-3}^{3} g(t)\, dt$

7.2. A área da região colorida.

8. Calcule as derivadas das funções definidas pelas seguintes expressões:

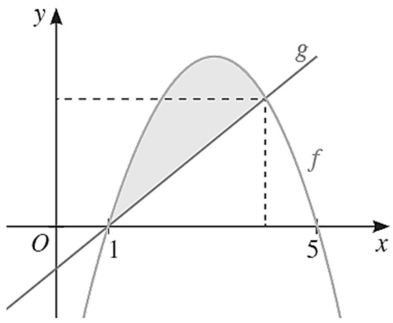
8.1. $\int_{1}^{x} \sin t\, dt$

8.2. $\int_{0}^{5x} (e^t + 1)\, dt$

8.3. $\int_{2x}^{0} (t^2 + 5t)\, dt$

9. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. xOy, a região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g. Calcule a área dessa região sabendo que:

- A função f é uma função quadrática com zeros 1 e 5;
- A função g é uma função afim;
- Os gráficos de f e g intersetam-se nos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(4, 3)$.

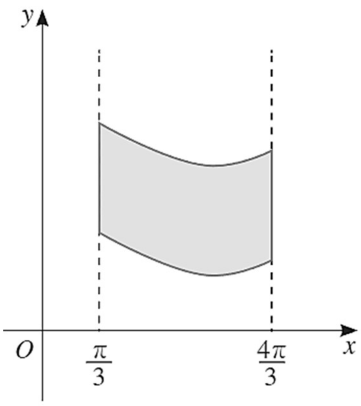


10. Calcule a derivada da função definida por:

$$\int_{\ln x}^{2\ln x} e^{2t}\, dt$$

11. Na figura estão representadas partes dos gráficos das funções definidas por:

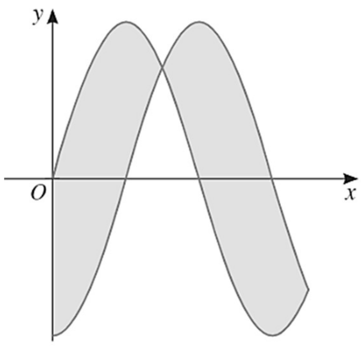
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} \qquad e \qquad g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{7}{2}$$



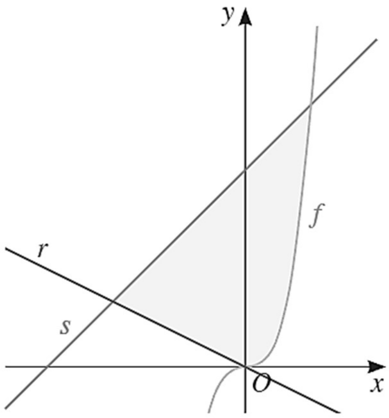
Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos e pelas retas paralelas ao eixo Oy e que intersetam o eio Ox nos pontos de abcissas $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.

12. Determine a área da região colorida representada na figura seguinte pelos gráficos das funções f e g de domínio $[0, \pi]$ definidas por:

$$f(x) = 2\sin(2x) \qquad e \qquad g(x) = -2\cos(2x)$$



13. Calcule a medida da área da região do plano, representada na figura, delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x^3$ e as retas r e s de equações $y = -\frac{1}{2}x$ e $y = x + 6$, respetivamente.



Soluções

1.

Como $\frac{4}{x}dx \geqslant 0$ para $x \in [1,4]$, a área corresponde a:

$$\int_1^4 \frac{4}{x}dx = 4\int_1^4 \frac{1}{x}dx = 4 \times [\ln x]_1^4 = 4(\ln 4 - \ln 1) = 4\ln 4 = \ln 256$$

2.

2.1.

$$\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = -\int_1^5 x^2\,dx + 6\int_1^5 x\,dx - \int_1^5 5\,dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 - 5[x]_1^5 = -\left(\frac{5^3-1}{3}\right) + 6\left(\frac{5^2-1}{2}\right) - (5-1) =$$

$$= -\frac{124}{3} + 6 \times \frac{24}{2} - 5 \times 4 = \frac{32}{3}$$

2.2.

$$\int_0^\pi (1 + \cos x)dx = \int_0^\pi 1\,dx + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = [x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi =$$

$$= \pi - 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

3.

3.1.

$$\int_0^6 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^6 = \frac{6^4}{4} = 324$$

3.2.

$$\int_e^{e^2} \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{2x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+5|\right]_e^{e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|e^4 + 5| - \ln|e^2 + 5|) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^4+5}{e^2+5}\right) = \ln\sqrt{\frac{e^4+5}{e^2+5}}$$

3.3.

$$\int_0^{-1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-1} = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

4.

4.1.

$$\int_1^{10} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx = 8 + 2 = 10$$

4.2.

$$\int_5^1 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx = -8$$

4.3.

$$\int_1^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx + 1 = 8 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx = 7$$

4.4.

$$\int_{10}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx = -\int_{4}^{10} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx =$$

$$= -\left(\int_{4}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{10} f(x)\,dx\right) + \int_{4}^{5} f(x)dx =$$

$$= -\int_{4}^{5} f(x)dx - \int_{5}^{10} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx = -\int_{5}^{10} f(x)dx = -2$$

5.

5.1.

$$\int_{-3}^{5} -5x^2\,dx = -5\int_{-3}^{5} x^2\,dx = -5\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{5} = -5\left(\frac{5^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right) = -5\left(\frac{125+27}{3}\right) = -\frac{760}{3}$$

5.2.

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (3x - \cos x)dx = 3\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x\,dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - [\sin x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 3\left(\frac{\frac{9\pi^2}{4} - \pi^2}{2}\right) - \left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\pi\right) = 3 \times \frac{5\pi^2}{8} + 1 = \frac{15\pi^2 + 8}{8}$$

5.3.

$$\int_{-4}^{-1} \frac{2}{x}dx = 2\int_{-4}^{-1} \frac{2}{x}dx = 2\big[\ln|x|\big]_{-4}^{-1} = 2(\ln 1 - \ln 4) = -2\ln 4 = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$$

6.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$\text{Área} = -\int_{0}^{1} (x^2 - 1)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{7}{3} - 1 = 2$$

7.

7.1.

$$\int_{-3}^{3} g(t)dt = \int_{-3}^{3} (t^2 - 4)dt = \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_{-3}^{3} = \left(\frac{27}{3} - 12\right) - \left(-\frac{27}{3} + 12\right) =$$

$$= \frac{27}{3} - 12 + \frac{27}{3} - 12 = -6$$

7.2.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Área} = \int_{-3}^{-2} (t^2 - 4)dt - \int_{-2}^{2} (t^2 - 4)dt + \int_{2}^{3} (t^2 - 4)dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_{2}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8 + \frac{27}{3} - 12\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8\right) + \left(\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8\right) =$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}$$

8.

8.1.

$$\left(\int_1^x \sin t\,dt\right)' = \sin x$$

8.2.

$$\left(\int_0^{5x} (e^t + 1)dt\right)' = 5(e^{5x} + 1) = 5e^{5x} + 5$$

8.3.

$$\left(\int_{2x}^{0} (t^2 + 5t)dt\right)' = \left(\int_0^{2x} (t^2 + 5t)dt\right)' = -2((2x)^2 + 5 \times 2x) = -8x^2 - 20x$$

9.

$f(x) = a(x - 1)(x - 5)$

Como $f(4) = 3$, tem-se que $a = -1$, logo, $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Para $A(1, 0)$ e $B(4, 3)$, tem-se que $\overrightarrow{AB}(3, 3)$, logo, $m = 1$ e $g(x) = x + b$.

Como $g(1) = 0$, $b = -1$, então, $g(x) = x - 1$.

Assim, $A = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5 - x + 1)dx =$

$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 = 4{,}5$ u.a.

10.

$$\left(\int_{\ln x}^{2\ln x} e^{2t}\,dt\right)' = e^{2 \times 2\ln x} \times \frac{2}{x} - e^{2\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{2e^{\ln x^4}}{x} - \frac{e^{\ln x^2}}{x} = \frac{2x^4 - x^2}{x} = 2x^3 - x$$

11.

$$\text{Área} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{7}{2}\right)dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{7}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{3}{2}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\left[x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} - \frac{3}{2}\left[x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$$

12.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} \vee x = \frac{7\pi}{8}$

$$A = \int_0^{\frac{3\pi}{8}} (2\sin(2x) + 2\cos(2x))dx + \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} (-2\cos(2x) - 2\sin(2x))dx =$$

$$= [-\cos(2x) + \sin(2x)]_0^{\frac{3\pi}{8}} + [-\sin(2x) + \cos(2x)]_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} = 4\sqrt{2}$$

13.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ -\frac{1}{2}x = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ -x = 2x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$I_1(-4, 2) \rightarrow$ ponto de interseção das retas r e s

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x^3 = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x^3 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

$I_2(2, 8) \rightarrow$ ponto de interseção de f e s

$$A = \int_{-4}^{0} (x + 6) - \left(-\frac{1}{2}x\right) dx + \int_{0}^{2} (x + 6 - x^3) dx = \int_{-4}^{0} \left(\frac{3x}{2} + 6\right) dx + \int_{0}^{2} (x + 6 - x^3)\, dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{4} + 6\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = -12 + 24 + 2 + 12 - 4 = 22$$