Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Teorema de Weierstrass

1. Considere a função h definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & se\ x\geq 0\wedge x\neq 1\\ 2x^3-3x+1 & se\ x<0\end{cases}$$

1.1. Estude a continuidade de h.

1.2. Poderá ser h uma restrição de uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$?

1.3. Mostre que h tem pelo menos um zero em $]-2,-1[$.

1.4. Considere a função p, definida por $p(x)=10x$. Prove que o gráfico de h interseta o gráfico de p num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]0,\frac{1}{4}\right[$.

1.5. Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor da abcissa da questão anterior, arredondado às centésimas.

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ em que:

$$f(1)=1 \qquad e \qquad f(3)=-2$$

Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras:

2.1. $-1\in D'_f$

2.2. f tem máximo e mínimo absolutos em $[1,3]$.

2.3. Se f é contínua, a equação $f(x)=0$ tem solução pertencente ao intervalo $]1,3[$.

2.4. Se f é contínua, $\frac{1}{f}$ tem máximo e mínimo absolutos em $[1,3]$.

2.5. Se f é contínua em $[1,3]$, a equação $f(x)=2$ é possível.

3. Sejam f e g duas funções reais de variável real, definidas, respetivamente, por:

$$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+2} \qquad e \qquad g(x)=|x|-\sin x$$

3.1. Justifique que ambas as funções, f e g, têm máximo e mínimo absolutos em $[-1,1]$.

3.2. O teorema de Weierstrass é aplicável à função $\frac{1}{g}$ em $[-1,1]$?

4. Para qual das funções seguintes é aplicável o teorema de Weierstrass em $[-1, 3]$?

4.1. $f(x) = x - x^2$

4.2. $g(x) = x - C(x)$

($C(x)$ representa a função característica, ou seja, a função que a $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder a parte inteira de x)

4.3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4.4. $f(x) = \begin{cases} 2 & se\ x = 0 \\ \frac{x+|x|}{x} & se\ x \neq 0 \end{cases}$

4.5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & se\ x > 1 \\ 2 & se\ x = 1 \\ 2x\cos(2x\pi) & se\ x < 1 \end{cases}$

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e g a função definida por:

$$g(x) = x^2\, f\left(\frac{1}{x}\right)$$

5.1. Justifique que a função g tem um máximo e um mínio absolutos em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5.2. Pode afirmar o mesmo que afirmou na alínea anterior em relação ao intervalo $[-1, 1]$? Justifique a sua resposta.

Soluções

1.

1.1.

h é contínua em $]0, +\infty[\backslash\{1\}$ por ser quociente de duas funções contínuas.
h é contínua em $]+\infty, 0[$ por ser uma função polinomial.

Estudemos a continuidade de h no ponto 0:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x^3 - 3x + 1) = 2 \times 0 - 3 \times 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = h(0)$, ou seja, existe $\lim_{x \to 0} h(x)$, pelo que h é contínua em $x = 0$.

Assim, h é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1.2.

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \left[(\sqrt{x} + 1)(x + 1)\right] = 2 \times 2 = 4$$

Sim, basta definir $h(1) = 4$.

1.3.

$]-2, -1[\subset]-\infty, 0[$

Pelas questões anteriores, h é contínua em $[-2, -1]$.

$h(-2) = 2 \times (-2)^3 - 3 \times (-2) + 1 = -9 < 0$

$h(-1) = 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = 2 > 0$

$h(-2) \times h(-1) < 0$. Logo, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, h tem pelo menos um zero no intervalo $]-2, -1[$.

1.4.

Seja $p(x) = 10x$.

Considere-se a função d, definida em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ por:

$$d(x) = h(x) - p(x) \Leftrightarrow d(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} - 10x$$

A função $d(x)$ é contínua em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

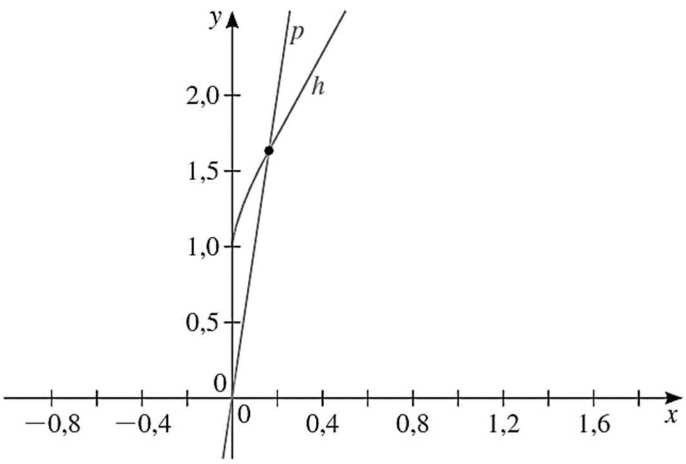
$d(0) = h(0) - p(0) = 1 > 0$

$$d\left(\frac{1}{4}\right) = h\left(\frac{1}{4}\right) - p\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} < 0$$

Logo, $d(0) \times d\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, portanto, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{1}{4}\right[: d(c) = 0$.

$d(c) = 0 \Leftrightarrow h(c) = p(c)$, isto é, podemos concluir que os gráficos de p e h se intersetam em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{1}{4}\right[$.

1.5.

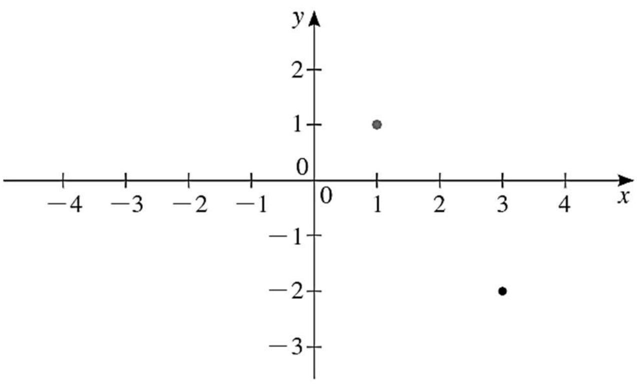


A abcissa do ponto de interseção é, aproximadamente, $0{,}16$.

2.

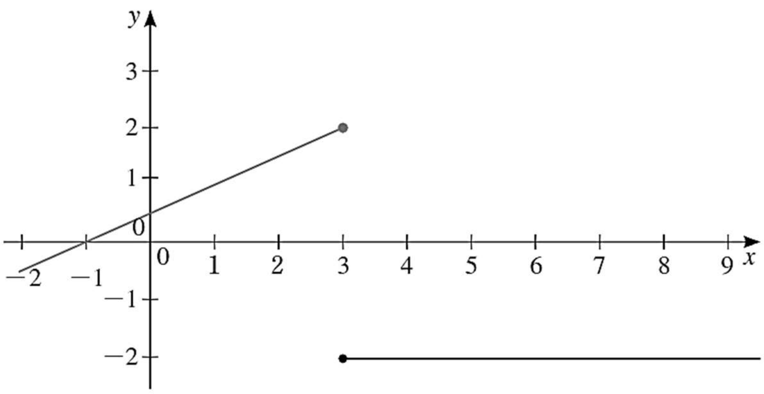
2.1.

A afirmação não é necessariamente verdadeira. Considere-se a função representada graficamente. Temos que $D'_f = \{-2, 1\}$, pelo que $-1 \notin D'_f$



2.2.

A afirmação não é necessariamente verdadeira. Considere-se a função representada graficamente. $f|_{[1,\,3]}$ não tem máximo absoluto.



2.3.

A afirmação é verdadeira.

Se f é contínua no seu domínio, é, em particular, contínua em $[1, 3]$.

$f(1) = 1 > 0$

$f(3) = -2 < 0$

Logo, $f(1) \times f(-2) < 0$, portanto, pelo corolário do teorema de Bolzano--Cauchy, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, 3[$.

2.4.

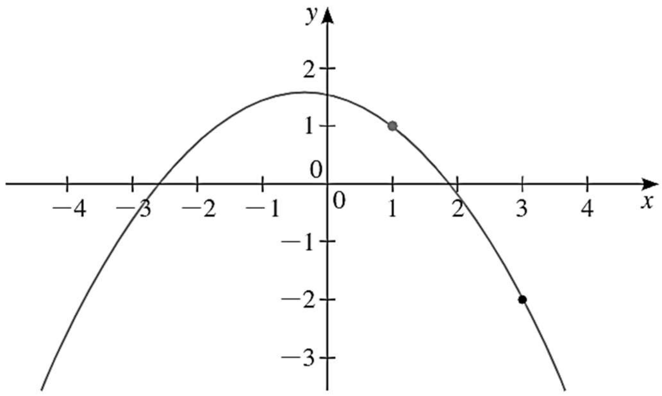
Seja f a função contínua definida por $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{2}{-3x+5}$ é uma função racional que não admite máximos nem mínimos em $[1, 3]$, já que $\frac{5}{3} \in [1, 3]$.

A afirmação não é necessariamente verdadeira.

2.5.

A afirmação não é necessariamente verdadeira. Considere-se a função representada graficamente. f é contínua em $[1, 3]$ e, no entanto, a equação $f(x) = 2$ é impossível.



3.

3.1.

f é quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $D_f = \mathbb{R}$ (porque $x^2 + x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) e g é a diferença de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Em particular, f e g são contínuas em $[-1, 1]$, logo, pelo teorema de Weierstrass, f e g admitem máximos e mínimos absolutos nesse intervalo.

3.2.

$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{|\,x\,| - \sin x}$ $\qquad D_{\frac{1}{g}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\frac{1}{g}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pelo que o teorema de Weierstrass não é aplicável nestas condições.

4.

4.1.

f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser uma função polinomial, pelo que é, em particular, contínua em $[-1, 3]$.

É aplicável o teorema de Weierstrass, uma vez que a função não é contínua.

4.2.

A função característica não é contínua em $[-1, 3]$, logo, por exemplo:
$\lim_{x \to 1^+} (x + C(x)) = 2$ e $\lim_{x \to 1^-} (x + C(x)) = -1$

O teorema de Weierstrass não é aplicável.

4.3.

f é uma função racional pelo que é contínua no seu domínio.

$Df = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ e $[-1, 3] \not\subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$, logo, o teorema de Weierstrass não é aplicável.

4.4.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \dfrac{x + |x|}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, logo, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e, consequentemente, f não é contínua em $x = 0$. Como $0 \in [-1, 3]$, f não é contínua neste intervalo, pelo que o teorema de Weierstrass não é aplicável.

4.5.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x \cos(2x\pi)) = 2 \times 1 \times \cos(2\pi) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, logo, a função é contínua em $x = 1$.

Assim, f é contínua em $[-1, 3]$, pelo que é aplicável o teorema de Weierstrass.

5.

5.1.

f é contínua em $\mathbb{R}$.

$\dfrac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e, em particular, é contínua em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, logo, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. x^2 é contínua em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

$g(x)$ é produto de funções contínuas em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, pelo que também é contínua nesse intervalo.

Assim, pelo teorema Weierstrass, g admite máximo e mínimo absoluto em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

5.2.

$\dfrac{1}{x}$ não está definida em $[-1, 1]$, pelo facto de o ponto de abcissa zero não pertencer ao seu domínio.

Deste modo, não podemos garantir a continuidade de g em $[-1, 1]$.

Assim, não podemos afirmar o mesmo.