Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Conjugado de um número complexo

1. Considere os números complexos:

$$z = -3 + i \qquad\qquad w = 2 + 5i$$

Calcule e apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1. $z \times w + \bar{z}$ **1.2.** $z^3 - w^2$

2. Calcule:

2.1. $i^{203} + i^{71} - i^{150}$ **2.2.** $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{1001}$

3. Determine o número natural n, tal que:

$$(2i)^n + (1 + i)^{2n} = 64i$$

4. Apresente na forma algébrica o conjugado de:

4.1. $3 - 2i$

4.2. -5

4.3. $-4i$

4.4. $2 + i + i^2$

4.5. $(1 - i) - (2 + 3i)$

4.6. $(2 - i)(1 - 3i)$

4.7. $i(3 - i^{11}) - 2(\overline{1 + 2i})$

5. Seja $z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$. Prove que se tem:

$$z - i\bar{z} = 0$$

6. Considere os números complexos:

$$z = 2 + i \qquad\qquad w = -1 + 3i$$

Calcule e apresente o resultado na forma algébrica:

6.1. $\overline{z + w}$ **6.2.** $\overline{1 - zw}$ **6.3.** $\overline{z^2}$

7. A diferença entre um complexo e o seu conjugado é $4i$ e a soma entre eles é 10.

Determine o complexo na forma algébrica.

8. Dado um complexo z, sabe-se que$\bar{z} = z \;\wedge\; \bar{z} = -z$.

Prove que z é nulo, usando dois processos distintos.

Soluções

1.

1.1.

$$z \times w + \bar{z} = (-3 + i) \times (2 + 5i) + \overline{(-3 + i)} =$$
$$= -6 - 15i + 2i - 5 + 3 - i = -14 - 14i$$

1.2.

$$z^3 = (-3 + i)^3 = {}^3C_0 \times (-3)^3 \times i^0 + {}^3C_1 \times (-3)^2 \times i^1 + {}^3C_2 \times (-3)^1 \times i^2 + {}^3C_3 \times (-3)^0 \times i^3 =$$
$$= -27 + 3 \times 9i + 3 \times 3 + i^3 = -27 + 27i + 9 - i = -18 + 26i$$
$$w^2 = (2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i$$
$$z^3 - w^2 = -18 + 26i + 21 - 20i = 3 + 6i$$

2.

2.1.

$$i^{203} + i^{71} - i^{150} = i^{50 \times 4 + 3} + i^{4 \times 17 + 3} - i^{4 \times 37 + 2} = i^3 + i^3 - i^2 =$$
$$= -i - i - (-1) = 1 - 2i$$

2.2.

$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1001}$ é a soma dos primeiros 1001 termos de uma progressão geométrica de razão i.

Assim:

$$S_{1001} = i \times \frac{1 - i^{1001}}{1 - i} = i \times \frac{1 - i}{1 - i} = i$$

3.

$$(2i)^n + (1 + i)^{2n} = 64i \Leftrightarrow (2i)^n + \left((1 + i)^2\right)^n = 64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2i)^n + (1 + 2i - 1)^n = 64i \Leftrightarrow (2i)^n + (2i)^n = 64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \times (2i)^n = 64i \Leftrightarrow 2 \times 2^n \times i^n = 64i \Leftrightarrow 2^{n+1} \times i^n = 64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n+1} = 64 \\ i^n = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + 1 = 6 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ i^5 = i \end{cases}$$

Assim, $n = 5$.

4.

4.1. $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$

4.2. $\overline{-5} = -5$

4.3. $\overline{-4i} = 4i$

4.4.

$$z = 2 + i + i^2 = 2 + i - 1 = 1 + i$$
$$\bar{z} = 1 - i$$

4.5.

$$z = (1 - i) - (2 + 3i) = 1 - i - 2 - 3i = -1 - 4i$$
$$\bar{z} = -1 + 4i$$

4.6.

$$(2 - i)(1 - 3i) = 2 - 3 - (1 + 6)i = -1 - 7i$$
$$\bar{z} = -1 + 7i$$

4.7.

$$z = i(3 - i^{11}) - 2\left(\overline{1 + 2i}\right) = i(3 + i) - 2(1 - 2i) =$$
$$= 3i + i^2 - 2 + 4i = 3i - 1 - 2 + 4i = -3 + 7i$$
$$\overline{z} = -3 - 7i$$

5.

Seja $z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$.

$z - i\overline{z} = (a + ai) - i(a - ai) = a + ai - ai + ai^2 = a + ai - ai - a = 0$

6.

6.1.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} = 2 - i - 1 - 3i = 1 - 4i$$

6.2.

$$\overline{1 - zw} = \overline{1} - \overline{z} \times \overline{w} = 1 - (2 - i) \times (-1 - 3i) =$$
$$= 1 + 2 + 6i - i + 3 = 1 + 5 + 5i = 6 + 5i$$

6.3.

$$\overline{z^2} = \overline{z} \times \overline{z} = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

7.

Seja $z = a + bi$ o complexo. $\overline{z} = a - bi$

Sabe-se que: $z - \overline{z} = 4i$ e $z + \overline{z} = 10$

Então:

$z - \overline{z} = 4i \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 4i \Leftrightarrow 2bi = 4i \Leftrightarrow 2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$

$z + \overline{z} = 10 \Leftrightarrow 4 + bi + a - bi = 10 \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

$z = 5 + 2i$

8.

1.º processo:

Seja $z = a + bi$

$\overline{z} = a - bi$

$-z = -a - bi$

$\overline{z} = z \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow a - bi = -a - bi \Leftrightarrow a = 0$

Logo, $z = 0$.

2.º processo:

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{z - z}{2} = 0$$

$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{z - z}{2i} = 0$$

Assim, $z = 0$.