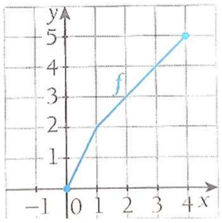
Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Função inversa de uma função bijetiva

1. Considere a função f representada no referencial da figura.



1.1. Indique D_f e D'_f.

1.2. Justifique que f é injetiva.

1.3. Determine:

1.3.1. $f^{-1}(4)$

1.3.2. $f^{-1}(3)$

1.3.3. $f^{-1}(2)$

2. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 1$.

2.1. Mostre que f é uma função bijetiva.

2.2. Determine a expressão analítica da função f^{-1}.

2.3. Represente graficamente a função f^{-1}.

3. Caracterize a função inversa de cada uma das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, por:

3.1. $f(x) = 3x - 6$

3.2. $g(x) = \frac{5x}{2} + \frac{1}{3}$

3.3. $i(x) = \frac{4x-1}{3}$

4. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x - 5$.

4.1. Apresente uma expressão para f^{-1}.

4.2. Determine o valor exato de $\frac{f^{-1}(-2)-f(2)}{3-2f^{-1}(3)}$.

4.3. Seja $(k, f(k))$ um ponto qualquer do gráfico de f. Mostre que o ponto $(f(k), k)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

4.4. Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ e $f \circ f^{-1}(x) = x$.

5. Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 3x + 2 \qquad e \qquad g(x) = \frac{-x+3}{2}$$

5.1. Defina analiticamente f^{-1} e g^{-1}.

5.2. Caracterize a função $f^{-1} \circ g^{-1}(x)$.

5.3. Mostre que $f \circ f^{-1}(x) = x$.

5.4. Calcule $\frac{f^{-1}(2)+g^{-1}(f(2))}{(g^{-1})^{-1}(-1)}$.

Soluções

1.

1.1. $D_f = [0,4]$ e $D'_f = [0,5]$

1.2. Qualquer reta paralela ao eixo Ox que intersete o gráfico de f interseta-o apenas num ponto. Logo, f é injetiva.

1.3.

1.3.1. Tem-se que $f(3) = 4$. Logo, $f^{-1}(4) = 3$.

1.3.2. Tem-se que $f(2) = 3$. Logo, $f^{-1}(3) = 2$.

1.3.3. Tem-se que $f(1) = 2$. Logo, $f^{-1}(2) = 1$.

2.

2.1. Injetividade: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Assim, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Portanto, a função f é injetiva.

Sobrejetividade: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = y$

Tem-se $f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$.

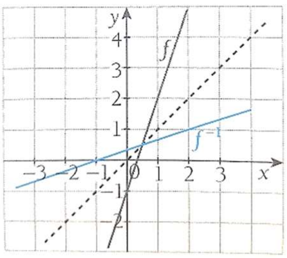
Logo, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe um número real x dado por $x = \frac{y+1}{3}$, para o qual $f(x) = y$. Portanto, a função f é sobrejetiva.

Como a função f é injetiva e sobrejetiva, conclui-se que é bijetiva.

2.2. Pela alínea anterior, tem-se que $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$.

Assim, $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$. Substituindo y por x, vem $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

2.3.



3.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y+6}{3}$.

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$.

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Assim,

$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow \frac{1}{3}x + 2$

3.2. $D_g = \mathbb{R}$; $g(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{2y}{5} - \frac{2}{15}$.

Portanto, $g^{-1}(x) = \frac{2x}{5} - \frac{2}{15}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$. Assim,

$g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow \frac{2}{5}x - \frac{2}{15}$

3.3. $D_i = \mathbb{R}$; $i(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{4}$.

Portanto, $i^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4}$.

$D_{i^{-1}} = \mathbb{R}$. Assim,

$i^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

4.

4.1. $f(x) = y \Leftrightarrow -2x - 5 = y \Leftrightarrow x = \frac{-y-5}{2}$

Assim, $f^{-1}(y) = \frac{-5-5}{2}$.

Substituindo y por x, vem $f^{-1}(x) = \frac{-x-5}{2}$.

4.2. $\frac{f^{-1}(-2)-f(2)}{3-2f^{-1}(3)} = \frac{15}{2}$

4.3. $(k, f(k)) = (k, -2k-5)$

Logo, $f^{-1}(f(k)) = f^{-1}(-2k-5) = k$

Portanto, o ponto $(f(k), k)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

4.4. $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x-5) = x$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{-x-5}{2}\right) = x$$

5.

5.1. Tem-se que: $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3}$. Assim, $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

Tem-se que: $g(x) = y \Leftrightarrow x = -2y + 3$.

Assim, $g^{-1}(x) = -2x + 3$

5.2. Tem-se que: $D_{f^{-1}\circ g^{-1}} = \{x \in D_{g^{-1}}: g^{-1}(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in \mathbb{R}: g^{-1}(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(-2x+3) = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$$

Assim:

$f^{-1} \circ g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

5.3. $f \circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) = x$

5.4. $\frac{f^{-1}(2)+g^{-1}(f(2))}{(g^{-1})^{-1}(-1)} = -\frac{13}{2}$