Ex. 16

16.1. Os dois quadrados são semelhantes pois os seus ângulos internos são todos retos (e, portanto, iguais) e o quociente entre as medidas de dois lados, um do quadrado de lado b e outro do quadrado de lado a é sempre igual a $\frac{b}{a}$.

16.2. $r = \frac{b}{a}$

16.3. $b^2 = (r \times a)^2 = r^2a^2$, uma vez que $b = ra$ (definição de razão de semelhança).

16.4. Da alínea anterior tem-se que $A_2 = r^2A_1$, pelo que $\frac{A_2}{A_1} = r^2$.

16.5. Dois quadrados são sempre semelhantes sendo a razão entre as áreas igual ao **quadrado** da razão de semelhança.

Ex. 17

17.1. $r = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

17.2. $r = \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

17.3. $\overline{FG} = 4{,}6 \times 0{,}6 = 2{,}76$

17.4. $\hat{\beta} = 108^\circ$ (como os polígonos são semelhantes $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$).

Ex. 18

18.1. $r = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}}$

$r = \frac{2{,}3}{1{,}15} = 2$

18.2. Como a razão de semelhança é 2 e o quociente entre os perímetros é igual à razão de semelhança, então $\frac{P_2}{P_1} = r$. Logo $P_2 = 2 \times 7{,}65 = 15{,}3$.

Como $\overline{CD} = \overline{AB}$, então $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ e $P_1 = 15{,}3$ cm.

$\overline{C'D'} = \overline{A'B'} = (15{,}3 - 2{,}8 - 2{,}3) : 2 = 5{,}1$ cm.

18.3. $A_{P_2} = 14{,}7$ cm^2

$\frac{A_{P_2}}{A_{P_1}} = r^2$, então $A_{P_1} = \frac{A_{P_2}}{r^2} = \frac{14{,}7}{4} = 3{,}675$ cm^2

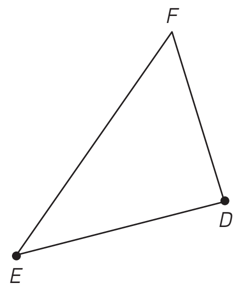
Ex. 19

A. São semelhantes porque são dois quadriláteros regulares.

B. Não são semelhantes porque não têm os lados proporcionais $\frac{2}{1} \neq \frac{5}{3}$.

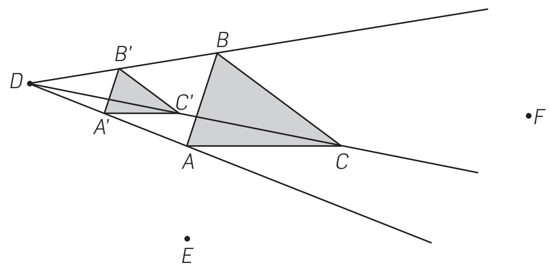
C. São semelhantes porque são triângulos com dois lados proporcionais $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ e os ângulos por eles formados geometricamente iguais (90º).

Ex. 20

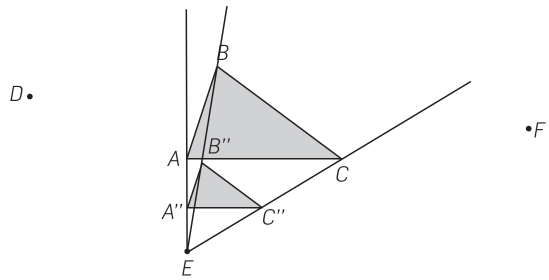


Ex. 21

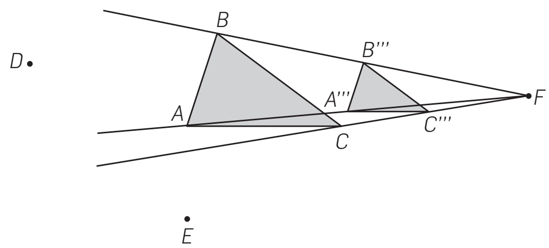
21.1.



21.2.



21.3.



21.4. "As respostas às três alíneas anteriores levam--me a admitir que **a homotetia não depende do centro considerado.**"

(Considerando diferentes centros para a homotetia e mantendo a razão de semelhança, obtêm-se figuras geometricamente iguais).

Ex. 22

Sabe-se que dois círculos são sempre semelhantes. Sabe-se ainda que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Assim, $r^2 = \dfrac{\text{Área do círculo 1}}{\text{Área do círculo 2}}$, ou seja, $r = \sqrt{4} = 2$.

Se a razão de semelhança é 2, o raio do círculo 1 é igual a 8 cm ($4 \times 2 = 8$).

Ex. 23

23.1. $A_{\square} = c \times \ell$

$24 = 6 \times \ell$

$\Leftrightarrow \ell = \dfrac{24}{6}$

$\Leftrightarrow \ell = 4$

Como se trata de uma ampliação de razão 7:

$c_{\text{ampliado}} = c_{\square} \times 7 = 6 \times 7 = 42$

$\ell_{\text{ampliado}} = \ell_{\square} = 4 \times 7 = 28$

Tem-se então que:

$A_{\text{ampliado}} = 42 \times 28 = 1176$. Logo, $A_{\text{ampliado}} = 1176$ cm^2.

23.2. Como se trata de uma redução de razão $\dfrac{1}{2}$:

$c_{\text{reduzido}} = c_{\square} \times \dfrac{1}{2} = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3$

$\ell_{\text{ampliado}} = \ell_{\square} \times \dfrac{1}{2} = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

Logo, $P = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$ ou seja, $P = 10$ cm.

Ex. 24

$\overline{DC} = 2{,}1$ cm

$\overline{AC} = 6{,}3$ cm

10 m = 1000 cm

2,1 ——— 1000

6,3 ——— x

$x = \dfrac{3{,}3 \times 1000}{2{,}1} = 3000$

Logo, $A_{\square} = 1000 \times 3000 = 3\,000\,000$

R.: A área do canteiro é 3 000 000 cm^2, ou seja, 300 m^2.

Ex. 25

Sabe-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, como $A_2 = 18$ m^2 e $A_1 = 6$ m^2, $r^2 = \dfrac{18}{6} = 3$. Logo, $r = \sqrt{3}$.

Ex. 26

Num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude e vice-versa.

Ora, se o triângulo do João é equilátero, os ângulos internos têm de ter todos a mesma amplitude, ou seja, 60º.

Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos são, garantidamente, semelhantes, pelo que o Filipe tem razão.

Ex. 27

27.1. $A = \dfrac{b \times h}{2}$

$A = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$ cm^2

27.2. Os triângulos são semelhantes por que têm dois lados proporcionais $\dfrac{4}{2} = \dfrac{7{,}2}{3{,}6} = 2$ e os ângulos por eles formados geometricamente iguais (34º).

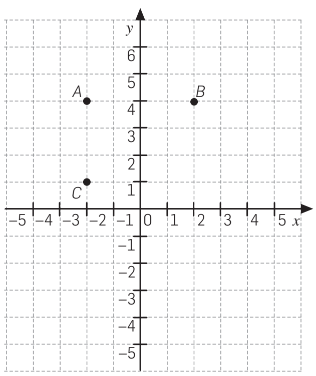
27.3. A área do triângulo [*ABC*] é 8 cm^2. Comos os triângulos são semelhantes, o quociente entre as respectivas áreas é igual ao quadrado de razão de semelhança.

Assim, $\dfrac{8}{x} = 2^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{4} = 2$, ou seja, o triângulo [*DEF*] tem 2 cm^2 de área.

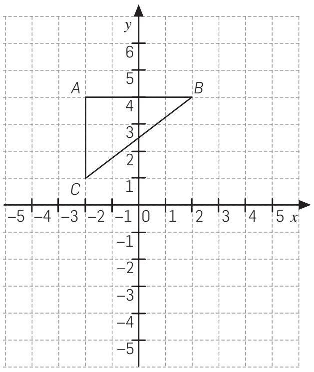
27.4. Como os triângulos são semelhantes, os ângulos correspondentes são geometricamente iguais. Assim, $\hat{\beta} = 117º$.

Ex. 28

28.1.

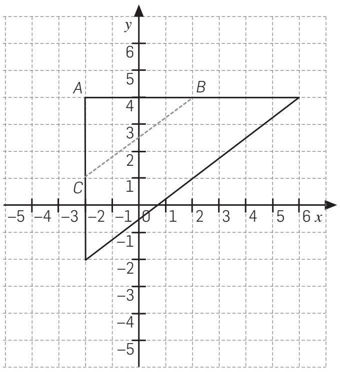


28.2.

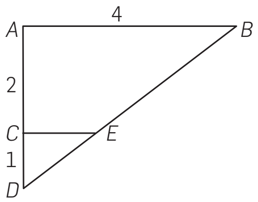


. O triângulo é escaleno e rectângulo.

28.3.



28.4.



Os triângulos [*ABC*] e [*DEC*] são semelhantes, pois têm dois ângulos geometricamente iguais. Como são semelhantes, têm os lados proporcionais.

Assim, $\frac{4}{x} = \frac{3}{1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \times 1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

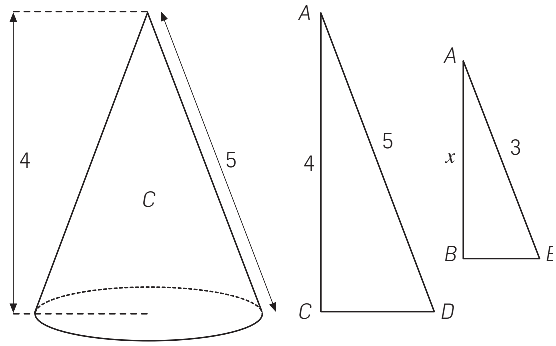
Ex. 29

[A] $\frac{a}{s} = \frac{c}{t}$

Ex. 30

Os triângulos são semelhantes porque têm dois lados proporcionais $\left(\frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}\right)$ e os ângulos por eles formados geometricamente iguais, $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ (ângulos verticalmente opostos).

Ex. 31



Os triângulos [*ACD*] e [*ABE*] são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais ($B\hat{A}E = C\hat{A}D$ e $D\hat{C}A = E\hat{B}A$). Assim,

$\frac{4}{\overline{AB}} = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4 \times 3}{5}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2{,}4$

Ex. 32

32.1. Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais: $F\hat{D}E = A\hat{B}C$ (ângulos opostos de um paralelogramo) e $D\hat{E}F = C\hat{A}B$ (ângulos agudos de lados paralelos).

32.2. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Como os triângulos são semelhantes, $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{DF} = 5$ cm, a razão de semelhança, considerando uma ampliação, é $r = \frac{10}{5} = 2$.

Logo, a razão entre as áreas é 4 ($2^2 = 4$).

32.3. Sabe-se que os triângulos [*DEF*] e [*ABC*] são semelhantes. Considerando uma ampliação, a razão de semelhança é 2.

Assim, como $\overline{AE} = \overline{ED}$, tem-se $\overline{ED} = 5$ cm e, consequentemente $\overline{BC} = 2 \times 5$ cm $= 10$ cm.

Como $\overline{EF} = 7{,}6$ cm, tem-se $\overline{AC} = 2 \times 7{,}6$ cm $= 15{,}2$ cm.

Sabendo que o perímetro do paralelogramo [*ABCD*] é 34,4 cm, tem-se:

$\overline{AB} = \frac{34{,}4 - (\overline{BC} + \overline{AD})}{2} =$

$= \frac{34{,}4 - (10 + 10)}{2} =$

$= 7{,}2$

Logo, $\overline{AB} = 7{,}2$ cm.

Então, o triângulo [*ABC*] tem 32,4 cm de perímetro pois:

$P_{\text{triângulo } [ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

$P_{\text{triângulo } [ABC]} = 7{,}2 + 10 + 15{,}2 = 32{,}4$

$P_{\text{triângulo } [ABC]} = 32{,}4$ cm

Ex. 33

33.1. Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais, $X\hat{V}W = X\hat{Y}Z = 90^o$ e $W\hat{X}V = Z\hat{X}Y$ (ângulos verticalmente opostos).

33.2. Como os triângulos são semelhantes têm os lados correspondentes proporcionais. Assim,

$$\frac{\overline{YZ}}{25} = \frac{160}{40}$$

$$\Leftrightarrow \overline{YZ} = \frac{25 \times 160}{40}$$

$$\Leftrightarrow \overline{YZ} = 100$$

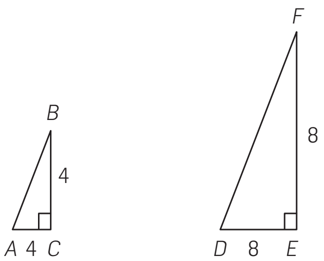
Logo, $\overline{YZ} = 100$ m.

Ex. 34

Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos correspondentes geometricamente iguais: $C\hat{E}D = B\hat{E}A$ (ângulos verticalmente opostos) e $D\hat{C}E = A\hat{B}E$ (ângulos agudos de lados paralelos).

Ex. 35

Considerando, por exemplo, os triângulos:



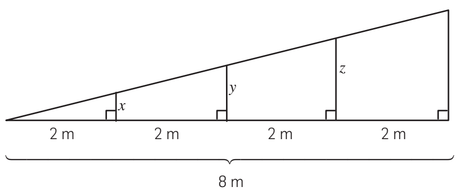
Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais, $C\hat{E}D = B\hat{E}A$ (ângulos verticalmente opostos) e $D\hat{C}E = A\hat{B}E$ (ângulos agudos de lados paralelos).

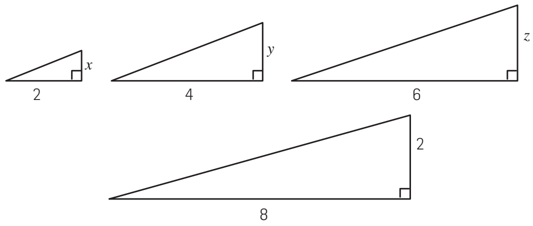
A afirmação é verdadeira porque um triângulo pode ser retângulo (um ângulo com 90º) e isósceles (dois lados iguais).

Os triângulos [*ABC*] e [*DEF*] são semelhantes.

Se o triângulo for retângulo nunca poderá ser equilátero porque num triângulo equilátero todos os ângulos têm 60º de amplitude.

Ex. 36





Como os triângulos são todos semelhantes, pelo critério AA, então têm os lados proporcionais. Assim,

$$\frac{2}{x} = \frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \times 2}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 0{,}5 \text{ m}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2 \times 4}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ m}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{8}{6}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \times 6}{8}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{12}{8}$$

$$\Leftrightarrow z = 1{,}5 \text{ m}$$

R.: A altura de cada uma das barras é, respetivamente, 0,5 m, 1 m e 1,5 m.

Ex. 37

37.1. $B\hat{A}C = 180^o - 90^o - 45^o = 45^o$

Então, $B\hat{A}C = A\hat{C}B$.

Como num triângulo a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude e vice-versa, tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ cm.

Logo, o triângulo é isósceles pois tem dois lados de igual comprimento.

37.2. Como $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ cm, a área do triângulo [*ABC*] é dada por:

$$A = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$$

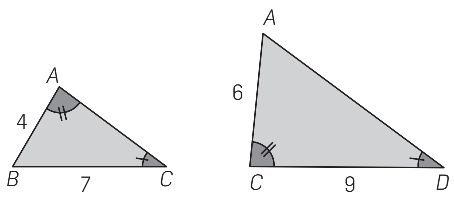
$$A = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

Logo, $A = 8$ cm^2.

37.3. Sabe-se que, num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude. Assim, como $\overline{ED} = \overline{FE}$, tem-se que
$E\hat{F}D = F\hat{D}E = \dfrac{180^{\circ} - 90^{\circ}}{2} = 45^{\circ}$.
Sendo assim, os triângulos [*ABC*] e [*DEF*] são semelhantes pois têm dois ângulos geometricamente iguais ($D\hat{E}F = C\hat{B}A = 90^{\circ}$ e $A\hat{C}B = F\hat{D}E = 45^{\circ}$).

37.4. A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Sendo assim,
$\dfrac{A_{\text{triângulo } [DEF]}}{A_{\text{triângulo } [ABC]}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$
Ou seja, $\dfrac{A_{\text{triângulo } [DEF]}}{8} = \dfrac{25}{16}$
$\Leftrightarrow A_{\text{triângulo } [DEF]} = \dfrac{8 \times 25}{16}$
$\Leftrightarrow A_{\text{triângulo } [DEF]} = 12{,}5$
Então, o triângulo [*DEF*] tem 12,5 cm^2 de área.

Ex. 38

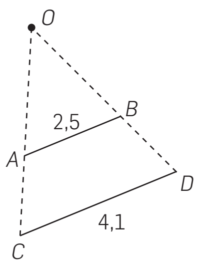


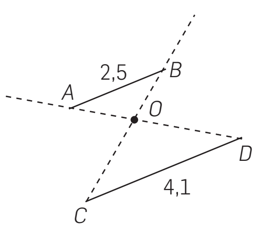
38.1. $A\hat{C}B = C\hat{D}A$ e $B\hat{A}C = D\hat{C}A$ (ângulos agudos de lados paralelos). Pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos [*ABC*] e [*CDA*] são semelhantes.

38.2. Como os triângulos são semelhantes têm os lados proporcionais. Assim,
$\dfrac{7}{\overline{AD}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9}$
$\overline{AD} = \dfrac{7 \times 6}{4} = 10{,}5$
Logo, $\overline{AD} = 10{,}5$ cm.

Testar – págs. 102 e 103

Ex. 1





Ex. 2

2.1. Duas figuras dizem-se semelhantes quando têm a mesma **forma**.

2.2. Se B é uma ampliação de A em que se triplicaram todos os comprimentos, então a razão de semelhança de A para B é **3**.

2.3. Quando a razão de semelhança entre duas figuras é **igual a 1**, as figuras dizem-se geometricamente iguais.

Ex. 3

3.1. $\dfrac{3{,}6}{1{,}8} = 2$

$\dfrac{4}{2} = 2$

$\dfrac{2{,}4}{1{,}2} = 2$

$\dfrac{3}{1{,}5} = 2$

Logo, $r = 2$.

3.2. Os triângulos [*ACD*] e [*A'C'D'*] são semelhantes, pois têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos por eles formados geometricamente iguais (critério LAL).
Assim, os ângulos *DAC* e *D'A'C'* e os ângulos *CDA* e *C'D'A'* são geometricamente iguais e os lados [*AD*] e [*A'D'*], diagonais dos polígonos, estão na mesma proporção que os restantes pares de lados.

3.3. Do mesmo modo se demonstra que os triângulos [*ABD*] e [*A'B'D'*] são semelhantes. Assim, os ângulos *ABD* e *A'B'D'* e os ângulos *BDA* e *B'D'A'* são geometricamente iguais e os lados [*BD*] e [*B'D'*], diagonais dos polígonos, estão na mesma proporção que os restantes pares de lados.

3.4. Como é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices dos dois polígonos, lados correspondem a lados e diagonais a diagonais, de modo que os comprimentos dos segmentos de reta correspondentes (lados e diagonais) são proporcionais, podemos concluir que os polígonos são semelhantes.